

Bases de Riesz e séries de Fourier não harmônicas

Proc. Fapesp 2021/14684-5

Vigência: 01/04/2022 - 31/03/2023

Bolsista: Lucas N. F. Teles

Orientador: Alexandre Kawano

Maio 2022 - Março 2023

Conteúdo

Resumo	1
1 Introdução	3
2 Sequências e bases de Schauder	5
2.1 Sequências em espaços de Banach	5
2.2 Ortogonalidade e Espaços de Hilbert	9
2.3 O Espaço ℓ^2 e o teorema de Riesz-Fischer	18
3 Sequências completas e dualidade	23
3.1 Sequências completas em espaços de Banach	23
3.2 Funcionais de coeficiente	29
3.3 Dualidade e bi-ortogonalidade	34
4 Estabilidade e bases de Riesz	43
4.1 Bases de Riesz	43
4.2 O teorema de Paley-Wiener	64

Resumo

Neste projeto de pesquisa, provamos um teorema devido a Paley & Wiener sobre bases em espaços de Banach e suas aplicações em séries de Fourier não harmônicas. No processo, várias ideias sobre espaços de Banach, de Hilbert e sobre representação de funções por meio de séries de Fourier não harmônicas vão sendo visitadas. Os resultados tem aplicações na análise de problemas inversos.

Capítulo 1

Introdução

Em disciplinas de álgebra linear, os alunos se familiarizam com o conceito de uma base para um espaço vetorial, em particular a base de Hamel.

Definição 1.0.1 (Base de Hamel). Se V é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} (ou \mathbb{C}) e $B \subset V$ um subconjunto de vetores linearmente independentes, dizemos que B é uma base de Hamel de V se B gera V . Isto é, se para qualquer $u \in V$, existem $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ (respectivamente \mathbb{C}) e $v_1, \dots, v_n \in B$ tais que

$$u = a_1v_1 + \dots + a_nv_n.$$

Essas bases introduzem ideias como a representação de vetores por sistemas de coordenadas e o conceito de dimensão de espaços vetoriais.

Definição 1.0.2. Dizemos que um espaço vetorial V tem dimensão n se existe B uma base de Hamel de V com n elementos.

O estudo de bases para espaços vetoriais não se limita à base de Hamel, tampouco à espaços vetoriais de dimensão finita. Bases de Schauder, Riesz e Hilbert trazem diferentes perspectivas no estudo de espaços vetoriais.

Definição 1.0.3. Se $(B, \|\cdot\|)$ é um espaço normado completo de dimensão infinita e $(b_1, b_2, \dots) \subset B$ uma sequência, dizemos que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma **base de Schauder** de B se para qualquer $y \in B$ existe uma sequência de escalares (a_1, a_2, \dots) única tal que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i = y.$$

i.e., $\|y - \sum_{i=1}^n a_i b_i\| \rightarrow 0$ com $n \rightarrow \infty$.

Enquanto bases de Hamel se restringem à combinações lineares (finitas) de vetores, bases de Schauder abrangem combinações enumeráveis e, com isso, são particularmente úteis para representar vetores em espaços vetoriais de dimensão infinita separáveis. Isto é, espaços vetoriais V de dimensão infinita nos quais há um subconjunto $S \subseteq V$ denso e enumerável.

Se um espaço vetorial H possuir um produto interno, tal que H for completo com a norma induzida, dizemos que este é um espaço de Hilbert. No desenvolvimento do texto, veremos que H sendo separável admite uma base de Schauder ortonormal. Além disso, veremos que bases de Schauder ortonormais (e_1, e_2, \dots) nos permitirão denotar qualquer vetor $f \in H$ através da série

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n. \quad (1.1)$$

Estas séries (1.1) são chamadas de *séries de Fourier* e tem um papel importante na matemática moderna. A fim de introduzir a noção de *séries de Fourier não-harmônicas*, isto é, séries do tipo (1.1) quando a base (e_1, e_2, \dots) deixa de ser ortogonal, exploraremos como bases de Schauder se relacionam entre si, com sequências de vetores e como são afetadas pelo espaço que habitam.

As principais referências usadas neste trabalho foram (Young; 2001), (Kreyszig; 1978) e (Bartle; 1976).

Capítulo 2

Sequências e bases de Schauder

2.1 Sequências em espaços de Banach

O estudo de espaços vetoriais é frequentemente complementado pela adição de estruturas e condições particularmente úteis, como normas.

Definição 2.1.1 (Espaço normado). Seja X um espaço vetorial, dizemos que X é um *espaço normado* se existe uma função $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

1. $\|x\| \geq 0$, $x \in X$.
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$, $x \in X$.
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\alpha \in \mathbb{F}$, $x \in X$.
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $x \in X$, $y \in X$.

Chamamos $\|\cdot\|$ de *norma de X* .

Para um mesmo espaço vetorial X , se $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são ambas normas em X , dizemos que são *normas equivalentes* se existem $m, M \in \mathbb{R}$ tais que, para qualquer $x \in X$

$$m\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M\|x\|_2.$$

Com noções de comprimento e distância definidas pela norma, podemos definir nesses espaços normados os típicos mecanismos da análise real, os conceitos de sequências e convergência:

Definição 2.1.2 (Sequência). Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado, denominamos uma função $a : \mathbb{N} \rightarrow X$, de sequência e denotamos os pontos $a(k)$ da sua imagem por a_k ,

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots$$

De forma geral, representamos a função $a(k)$ por $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou (a_1, a_2, \dots) .

Definição 2.1.3. Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado, e $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em X . Dizemos que a_n é convergente se $\exists p \in X$ tal que,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \implies \|a_n - p\| < \varepsilon$$

Adotamos as notações $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$, $a_n \xrightarrow{X} p$ ou simplesmente $a_n \rightarrow p$.

Definição 2.1.4 (Série). Para $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado, chamamos de *série* uma sequência $(\sum_{i=1}^n a_i)_{n \in \mathbb{N}}$ onde $a_i \in X$, $\forall i \in \mathbb{N}$ e a denotamos por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Adotaremos a notação $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ para representar tanto o elemento para o qual a série converge como, de forma mais geral, a sequência de somas parciais.

Definição 2.1.5 (Sequência de Cauchy). Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado e $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em X . Se, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n, m > n_0$:

$$\|a_n - a_m\| < \varepsilon,$$

dizemos que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy.

Uma consequência imediata, é que toda sequência convergente é uma sequência de Cauchy, uma vez que, com $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ e $\varepsilon > 0$ arbitrário, podemos determinar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n, m > n_0$ garantem:

$$\|a_n - a_m\| \leq \|a - a_n\| + \|a - a_m\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por outro lado, a convergência de sequências de Cauchy não é necessariamente garantida, fato que motiva o estudo dos *espaços de Banach*.

Definição 2.1.6 (Espaço de Banach). Chamamos de espaço de Banach um espaço normado $(B, \|\cdot\|)$ em que toda sequência de Cauchy $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

De forma geral, se S é um espaço métrico em que toda sequência de Cauchy converge, dizemos que S é um espaço completo.

Teorema 2.1.1. *Seja $(B, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach onde $a_n \xrightarrow{B} a$ e $b_n \xrightarrow{B} b$, então seguem as seguintes propriedades*

1. $(a_n + b_n) \xrightarrow{B} a + b$.
2. $\alpha b_n \xrightarrow{B} \alpha b \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$.

Demonstração.

1. Por hipótese, dado $\varepsilon > 0$ existem $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$ tais que para quaisquer $n > n_0$ e $m > m_0$:

$$\|a_n - a\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \|b_m - b\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomemos $\delta = \max\{n_0, m_0\}$, para todo $n > \delta$:

$$\begin{aligned} \|(a_n + b_n) - (a + b)\| &\leq \|(a_n + b_n) - (a + b_n)\| + \|(a + b_n) - (a + b)\| \\ &\leq \|a_n - a\| + \|b_n - b\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por definição, $(a_n + b_n) \xrightarrow{B} a + b$.

2. Para $\alpha = 0$, temos de imediato que $0y_n \xrightarrow{B} 0$, já que, para qualquer $\varepsilon > 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$, $\|0b_n - 0\| = \|0 - 0\| = 0 < \varepsilon$.

Para $\alpha \neq 0$ e $b_n \xrightarrow{B} b$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ onde $n > n_0$ garante $\|b - b_n\| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$ e,

$$\|\alpha b - \alpha b_n\| = |\alpha| \|b - b_n\| < |\alpha| \frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon.$$

Portanto, $\alpha b_n \xrightarrow{B} \alpha b$.

□

Definição 2.1.7. Dizemos que um espaço de Banach B é separável se este possui um subconjunto denso nele e enumerável. Isto é, se existe $S \subseteq B$ enumerável tal que, para quaisquer $\varepsilon > 0$ e $x \in B$, existe $x_\varepsilon \in S$:

$$\|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon.$$

Teorema 2.1.2. *Todo espaço de Banach que admite uma base de Schauder é separável*

Demonstração. Se (b_1, b_2, b_3, \dots) é uma base de Schauder de um espaço de Banach B , então para qualquer $x \in B$ existe uma sequência de escalares (a_1, a_2, \dots) tal que:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 : \left\| x - \sum_{i=1}^n a_i b_i \right\| < \varepsilon.$$

Tome

$$D = \left\{ \sum_{j=1}^n (c_j + d_j i) b_j : c_j, d_j \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

1. D é enumerável.

Tomando como C o subconjunto de \mathbb{C} cujos elementos tem parte real e imaginária racional, podemos definir uma sobrejeção $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow C$ pondo $f(x, y) = x + yi$. Uma vez que f tem como domínio o produto cartesiano de enumeráveis, é enumerável e portanto, C é enumerável.

Em seguida, provaremos que o conjunto de combinações lineares dos n primeiros vetores de $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é enumerável. Para isso, tome:

$$S_n = \left\{ \sum_{j=1}^n a_j b_j : a_1, \dots, a_n \in C \right\}.$$

Defina $g : C \rightarrow S_1$ por $g(x) = x b_1$. g é uma sobrejeção e, como tem domínio enumerável, S_1 é enumerável.

Agora, supondo que S_k seja enumerável, definimos $h : S_k \times C \rightarrow S_{k+1}$ por $h(x, y) = x + y b_{k+1}$, que claramente é uma sobrejeção. Como h tem por domínio um produto cartesiano de enumeráveis, seu domínio é enumerável e com isso S_{k+1} é enumerável.

Pelo princípio da indução finita, S_n é enumerável para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por fim, escrevendo

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n,$$

temos que D é uma união enumerável de conjuntos enumeráveis e portanto é enumerável.

2. D é denso em B .

Sejam $x \in B$ e $\varepsilon > 0$ quaisquer, existem então $(c_1, c_2, \dots) \subset \mathbb{C}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_0 \implies \|x - \sum_{i=1}^n c_i b_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$, pois (b_1, b_2, b_3, \dots) é uma base de Schauder. Além disso, assumindo $c_j = p_j + q_j i$ onde $p_j, q_j \in \mathbb{R}$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e como os racionais são densos nos reais:

$$\forall p_j, q_j \in \mathbb{R}, \exists r_j, s_j \in \mathbb{Q} \text{ tais que } \begin{cases} |p_j - r_j| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}\|b_j\|(n_0+1)} \\ |q_j - s_j| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}\|b_j\|(n_0+1)}. \end{cases}$$

Tomando $w_j = r_j + s_j i$ para todo $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \therefore |c_j - w_j| &= |(p_j + q_j i) - (r_j + s_j i)| = \sqrt{|p_j - r_j|^2 + |q_j - s_j|^2} \\ &< \sqrt{2 \left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}\|b_j\|(n_0+1)} \right)^2} = \sqrt{2} \left| \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}\|b_j\|(n_0+1)} \right| \\ &= \frac{\varepsilon}{2\|b_j\|(n_0+1)}. \end{aligned}$$

Assim, com $n = n_0 + 1 > n_0$ existe $\sum_{j=1}^n r_j b_j \in D$ tal que:

$$\begin{aligned} \|x - \sum_{j=1}^n w_j b_j\| &\leq \|x - \sum_{j=1}^n c_j b_j\| + \left\| \sum_{j=1}^n c_j b_j - \sum_{j=1}^n w_j b_j \right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^n |c_j - w_j| \|b_j\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon}{2\|b_j\|n} \|b_j\| = \frac{\varepsilon}{2} + n \frac{\varepsilon}{2n} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Portanto C é denso em B .

□

2.2 Ortogonalidade e Espaços de Hilbert

Espaços de Banach, que são completos, conferem ao espaço, através da norma, um conceito de comprimento e distância. Os espaços com os quais

trabalharemos a seguir, além de desfrutarem dessas propriedades recebem uma nova operação que inspira noções de ortogonalidade e independência entre vetores.

Definição 2.2.1 (Produto interno). Para X um espaço vetorial e \mathbb{F} um campo de escalares (\mathbb{R} ou \mathbb{C}) chamamos de produto interno uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{F}$ onde, $\forall x, y, z \in X$:

1. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.
2. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$.
3. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
4. $\begin{cases} \langle x, x \rangle \geq 0. \\ \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0. \end{cases}$

Observação. Enquanto o produto interno, assim como outros objetos matemáticos que discutiremos ao longo desse trabalho, envolve um corpo \mathbb{F} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}), frequentemente faremos demonstrações assumindo $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ sem explicitar a possibilidade de $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Uma vez que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, o caso real geralmente segue como uma consequência direta do caso complexo.

A partir de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ podemos definir uma norma:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad \text{para todo } x \in S.$$

À chamamos de *norma induzida/gerada por* $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Quando não explicitada a norma num espaço vetorial com produto interno, assumimos que tenha como norma a norma induzida. Além disso, dizemos que dois produtos internos são equivalentes se geram normas equivalentes.

Definição 2.2.2 (Espaço de Hilbert). Se H é um espaço vetorial onde está definido um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ que é completo com a norma induzida, dizemos que H é um Espaço de Hilbert. Adotamos a notação $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Após a adoção do produto interno, é natural definirmos um conceito de ortogonalidade, dizemos então que dois vetores $x, y \in H$ são ortogonais se $\langle x, y \rangle = 0$. Análogo ao caso do \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 de ortogonalidade, podemos pensar que vetores ortogonais habitam “eixos” diferentes do espaço. Dizemos que

um conjunto (ou sequência) de vetores é ortogonal se todos são ortogonais entre si. Se além disso, todos tiverem norma $\|x\| = 1$, este será um conjunto (ou sequência) de vetores dito ortonormal.

Com essa noção de ortogonalidade em espaços de Hilbert provaremos a seguir algumas famosas identidades que acentuam a relevância do produto interno. Sejam x e y vetores ortogonais em um espaço de Hilbert H , então:

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle.\end{aligned}$$

Com $\langle x, y \rangle = 0$ e, conseqüentemente, $\langle y, x \rangle = 0$, temos:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2. \quad (\text{Teorema de Pitágoras})$$

Agora, tome x e y vetores arbitrários em um espaço de Hilbert H , com y não nulo. Podemos definir um escalar $\lambda = \langle x, y \rangle \cdot \langle y, y \rangle^{-1}$, tal que

$$\begin{aligned}0 &\leq \|x - \lambda y\|^2 = \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle \\ &\leq \langle x, x \rangle - \bar{\lambda} \langle x, y \rangle - \lambda \langle y, x \rangle + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle \\ &\leq \langle x, x \rangle - 2|\langle x, y \rangle|^2 \langle y, y \rangle^{-1} + |\langle x, y \rangle|^2 \langle y, y \rangle^{-1} \\ &\leq \langle x, x \rangle - |\langle x, y \rangle|^2 \langle y, y \rangle^{-1}.\end{aligned}$$

Daí,

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle. \quad (\text{Cauchy-Schwarz})$$

Note que para y nulo, a desigualdade é imediata. Isto é, ela vale para quaisquer $x, y \in H$.

Uma consequência imediata da desigualdade de Cauchy-Schwarz, é a continuidade do produto interno em ambas suas entradas. Em particular, seja $p \in H$ fixo, as funções $f, g : H \rightarrow \mathbb{F}$ (\mathbb{R} ou \mathbb{C}) definidas por $f(x) = \langle x, p \rangle$ e $g(x) = \langle p, x \rangle$ são contínuas em H : Primeiro, se temos $p = 0$, as funções são nulas e conseqüentemente contínuas. Para $p \neq 0$, seja $x_0 \in H$ qualquer e $\varepsilon > 0$, basta tomar qualquer $x \in H$ tal que $\|x - x_0\| < \frac{\varepsilon}{\|p\|}$, daí:

$$|\langle x_0, p \rangle - \langle x, p \rangle| \leq |\langle x_0 - x, p \rangle| \leq \|x - x_0\| \cdot \|p\| < \varepsilon.$$

Portanto, f é contínua em x_0 . Como a escolha de x_0 é arbitrária, dizemos que f é contínua em H . De forma análoga, podemos provar o mesmo resultado para g .

Teorema 2.2.1 (Desigualdade de Bessel). *Seja $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço de Hilbert e (e_1, e_2, \dots) uma sequência ortonormal, $\forall f \in H$,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

Demonstração. Seja $k \in \mathbb{N}$ qualquer fixo,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| f - \sum_{n=1}^k \langle f, e_n \rangle e_n \right\|^2 = \left\langle f - \sum_{n=1}^k \langle f, e_n \rangle e_n, f - \sum_{n=1}^k \langle f, e_n \rangle e_n \right\rangle \\ &= \left\langle f - \sum_{n=1}^k \langle f, e_n \rangle e_n, f \right\rangle + \left\langle f - \sum_{n=1}^k \langle f, e_n \rangle e_n, - \sum_{n=1}^k \langle f, e_n \rangle e_n \right\rangle \\ &= \langle f, f \rangle + \left\langle - \sum_{n=1}^k \langle f, e_n \rangle e_n, f \right\rangle + \left\langle f, - \sum_{n=1}^k \langle f, e_n \rangle e_n \right\rangle \\ &\quad + \left\langle - \sum_{n=1}^k \langle f, e_n \rangle e_n, - \sum_{n=1}^k \langle f, e_n \rangle e_n \right\rangle \\ &= \|f\|^2 - \sum_{n=1}^k \langle f, e_n \rangle \overline{\langle f, e_n \rangle} - \sum_{n=1}^k \overline{\langle f, e_n \rangle} \langle f, e_n \rangle \\ &\quad + \sum_{n=1}^k \left(\langle f, e_n \rangle \langle e_n, \sum_{m=1}^k \langle f, e_m \rangle e_m \rangle \right) \\ &= \|f\|^2 - 2 \sum_{n=1}^k |\langle f, e_n \rangle|^2 + \sum_{n=1}^k \sum_{m=1}^k \langle f, e_n \rangle \overline{\langle f, e_m \rangle} \langle e_n, e_m \rangle. \end{aligned}$$

Como e_1, \dots, e_k são ortonormais, se $n \neq m$, $\langle e_n, e_m \rangle = 0$,

$$\begin{aligned} &= \|f\|^2 - 2 \sum_{n=1}^k |\langle f, e_n \rangle|^2 + \sum_{n=1}^k |\langle f, e_n \rangle|^2 \underbrace{\langle e_n, e_n \rangle}_1 \\ &= \|f\|^2 - \sum_{n=1}^k |\langle f, e_n \rangle|^2 \therefore \sum_{n=1}^k |\langle f, e_n \rangle|^2 \leq \|f\|^2. \end{aligned}$$

Como isso é válido para qualquer $k \in \mathbb{N}$, basta tomar $k \rightarrow \infty$ e temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2 \leq \|f\|^2. \quad \square$$

Teorema 2.2.2. *Se $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é um espaço de Hilbert separável e (e_1, e_2, \dots) uma base de Schauder ortonormal, dado qualquer $f \in H$, podemos expressá-lo por*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n.$$

Demonstração. Seja $f \in H$ qualquer. Pela desigualdade de Bessel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\langle f, e_n \rangle e_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2 \underbrace{\|e_n\|^2}_1 \leq \|f\|^2$$

Agora provaremos o seguinte resultado:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2 \leq \|f\|^2 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n \text{ converge.}$$

Tome $m, n \in \mathbb{N}$ quaisquer com $m > n$,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^m \langle f, e_i \rangle e_i - \sum_{i=1}^n \langle f, e_i \rangle e_i \right\|^2 &= \left\| \sum_{i=n+1}^m \langle f, e_i \rangle e_i \right\|^2 \\ &= \left\langle \sum_{i=n+1}^m \langle f, e_i \rangle e_i, \sum_{j=n+1}^m \langle f, e_j \rangle e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=n+1}^m \langle f, e_i \rangle \langle e_i, \sum_{j=n+1}^m \langle f, e_j \rangle e_j \rangle \\ &= \sum_{i=n+1}^m \sum_{j=n+1}^m \langle f, e_i \rangle \overline{\langle f, e_j \rangle} \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \sum_{i=n+1}^m \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^m \langle f, e_i \rangle \overline{\langle f, e_j \rangle} \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_0 \\ &\quad + \sum_{r=n+1}^m \langle f, e_r \rangle \overline{\langle f, e_r \rangle} \underbrace{\langle e_r, e_r \rangle}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^m \langle f, e_i \rangle e_i - \sum_{i=1}^n \langle f, e_i \rangle e_i \right\|^2 &= \sum_{r=n+1}^m |\langle f, e_r \rangle|^2 \\ &= \sum_{r=1}^m |\langle f, e_r \rangle|^2 - \sum_{r=1}^n |\langle f, e_r \rangle|^2. \end{aligned}$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2$ converge, é uma sequência de Cauchy. Então, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que se $n, m > n_0$ com $m > n$:

$$\left\| \sum_{i=1}^m \langle f, e_i \rangle e_i - \sum_{i=1}^n \langle f, e_i \rangle e_i \right\|^2 = \sum_{r=1}^m |\langle f, e_r \rangle|^2 - \sum_{r=1}^n |\langle f, e_r \rangle|^2 < \varepsilon.$$

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$ é Cauchy e como H é completo, converge em H . Para mostrar que de fato $\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$ é a série, única, que representa f usando a base (e_1, e_2, \dots) , considere a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ tal que

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i,$$

para qualquer e_k com $k \in \mathbb{N}$, como $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ é convergente e pela continuidade do produto interno,

$$\langle f, e_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i, e_k \right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle a_i e_i, e_k \rangle = a_i \langle e_k, e_k \rangle.$$

Com isso, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\langle f, e_i \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ e finalizamos a prova. \square

Enquanto provar a convergência de uma série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ a f é frequentemente um passo necessário para mostrarmos que esta é a série que uma base de Schauder admite para o vetor f , neste caso em particular a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$ a f é garantida pela natureza dos coeficientes $(\langle f, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$. Isto é, como temos que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de Schauder, sabemos que admite *alguma* série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ associada à f . Seria suficiente então mostrar que os coeficientes $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ coincidem com $(\langle f, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ pelo argumento final que usamos na demonstração anterior. Veja:

Demonstração alternativa. Como $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de Schauder, existe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, uma seqüência de escalares unica, tal que:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n.$$

Tome $k \in \mathbb{N}$ qualquer. Como o produto interno é contínuo na primeira entrada,

$$\langle f, e_k \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, e_k \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle e_n, e_k \rangle = a_k \langle e_k, e_k \rangle = a_k.$$

Portanto, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\langle f, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$. \square

Se (e_1, e_2, \dots) é uma base de Schauder ortonormal de um espaço de Hilbert H e $f \in H$ qualquer, chamamos $\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$ de **expansão de Fourier** de f e o escalar $\langle f, e_n \rangle$ de n -ésimo **coeficiente de Fourier**.

Teorema 2.2.3. *Uma seqüência de vetores ortogonais não-nulos $(e_1, e_2, \dots) \subseteq H$ é uma base de Schauder ortogonal de um espaço de Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se, e somente se, o único vetor em H ortogonal a todos estes é o vetor nulo.*

Demonstração. (\Rightarrow) Se (e_1, e_2, \dots) é uma base de Schauder ortogonal e $x \neq 0$ é um vetor em H arbitrário, existe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ tal que

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$$

em que ao menos um a_k é não nulo (caso contrário, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i = \sum_{i=1}^{\infty} 0 e_i = 0$). Portanto:

$$\langle x, e_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i, e_k \right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \langle e_i, e_k \rangle = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{\infty} a_i \underbrace{\langle e_i, e_k \rangle}_0 + a_k \langle e_k, e_k \rangle \neq 0.$$

Isto é, x não é ortogonal a nenhum e_k . Se, por outro lado, $x = 0$, então $\langle x, e_n \rangle = \langle 0 \cdot e_n, e_n \rangle = 0 \langle e_n, e_n \rangle = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Com isso, o vetor nulo é o único ortogonal a todos os vetores da base (e_1, e_2, \dots) .

(\Leftarrow) Se (e_1, e_2, \dots) é uma sequência de vetores ortogonais em que o único vetor ortogonal a todos os vetores na sequência é o vetor nulo, podemos definir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ tal que:

$$a_n = \frac{\langle x, e_n \rangle}{\langle e_n, e_n \rangle}.$$

Agora, vamos provar que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \in H$, que, de fato, $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ e por fim que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é única. Primeiro, veja que para $n, m \in \mathbb{N}$ com $m > n$:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^m a_i e_i - \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\|^2 &= \left\| \sum_{i=n+1}^m a_i e_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=n+1}^m a_i e_i, \sum_{j=n+1}^m a_j e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=n+1}^m \sum_{j=n+1}^m a_i \bar{a}_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=n+1}^m a_i \bar{a}_i \langle e_i, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=n+1}^m \left| \frac{\langle x, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} \right|^2 \langle e_i, e_i \rangle = \sum_{i=n+1}^m \frac{|\langle x, e_i \rangle|^2}{|\langle e_i, e_i \rangle|}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\left\| \sum_{i=1}^m a_i e_i - \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^m \frac{|\langle x, e_i \rangle|^2}{\langle e_i, e_i \rangle} - \sum_{i=1}^n \frac{|\langle x, e_i \rangle|^2}{\langle e_i, e_i \rangle}. \quad (2.1)$$

Agora, tomamos

$$\left(\frac{e_1}{\sqrt{\langle e_1, e_1 \rangle}}, \frac{e_2}{\sqrt{\langle e_2, e_2 \rangle}}, \dots \right)$$

uma sequência ortonormal de vetores em H . Pela desigualdade de Bessel:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \left\langle x, \frac{e_i}{\sqrt{\langle e_i, e_i \rangle}} \right\rangle \right|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\langle x, e_i \rangle|^2}{\langle e_i, e_i \rangle} \leq \|x\|^2.$$

Essa série é convergente e portanto Cauchy. Então, para $\varepsilon > 0$ qualquer, existe n_0 tal que $n, m > n_0$ com $m > n$ e por (2.1):

$$\left\| \sum_{i=1}^m a_i e_i - \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^m \frac{|\langle x, e_i \rangle|^2}{\langle e_i, e_i \rangle} - \sum_{i=1}^n \frac{|\langle x, e_i \rangle|^2}{\langle e_i, e_i \rangle} < \varepsilon.$$

Portanto, $(\sum_{i=1}^n a_i e_i)_{n \in \mathbb{N}}$ é Cauchy e, em H completo, converge. Agora, para qualquer $k \in \mathbb{N}$ e sabendo que o produto interno é contínuo no primeiro argumento, temos,

$$\begin{aligned} \langle x - \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i, e_k \rangle &= \langle x, e_k \rangle - \langle \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \sum_{i=1}^{\infty} \langle a_i e_i, e_k \rangle \\ &= \langle x, e_k \rangle - a_k \langle e_k, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle x, e_k \rangle = 0. \end{aligned}$$

Portanto $x - \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ é ortogonal a todo $e_k, k \in \mathbb{N}$ e, por hipótese,

$$x - \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i = 0 \implies x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i.$$

Para provar a unicidade de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ basta supor $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}, (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ com $x = \sum_{i=1}^{\infty} b_i e_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ e um índice $k \in \mathbb{N}$ qualquer,

$$\begin{aligned} \underbrace{\langle 0, e_k \rangle}_0 &= \langle \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i - \sum_{i=1}^{\infty} b_i e_i, e_k \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle a_i e_i - b_i e_i, e_k \rangle \\ &= \langle (a_k - b_k) e_k, e_k \rangle = |a_k - b_k| \underbrace{\langle e_k, e_k \rangle}_{\neq 0}. \end{aligned}$$

Com isso, temos $a_k = b_k$. Como a escolha de $k \in \mathbb{N}$ é arbitrária, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é única, então (e_1, e_2, \dots) é uma base de Schauder. \square

Teorema 2.2.4. *Todo espaço de Hilbert separável admite uma base de Schauder ortonormal.*

Demonstração. Seja $S \subset H$ um subconjunto enumerável e denso em H , um espaço de Hilbert. Como S é enumerável, podemos construir uma sequência (s_1, s_2, \dots) que contém todos os elementos de S . Agora, seguindo o processo de Gram-Schmidt definimos recursivamente a seguinte sequência:

$$b_1 = \frac{s_1}{\|s_1\|} \quad \text{e} \quad b_k = \frac{s_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle s_k, b_i \rangle b_i}{\|s_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle s_k, b_i \rangle b_i\|}, \quad \forall k > 1.$$

Construindo $b_j, j \in \mathbb{N}$, eliminando os vetores nulos no processo, obtemos uma sequência $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ortonormal. Basta agora provar que o único vetor ortogonal a todos os vetores de $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é o vetor nulo e teremos que essa sequência é uma base de Schauder.

Suponha que $x \in H$ é ortogonal a todo e_i , $i \in \mathbb{N}$. Como S é denso em H , existe uma sequência de elementos de S que converge para $x \in H$. Ora, todo elemento de S é por sua vez uma combinação linear de elementos de $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, pela construção usando o processo de Gram-Schmidt. Daí, existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{span}(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_n \rightarrow x$. Mas por hipótese, $x \in H$ é ortogonal a todo e_i , $i \in \mathbb{N}$, então $\langle x, x_n \rangle = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Finalmente, da continuidade da função $y \mapsto \langle y, x \rangle$, temos $x = 0$, pois

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n, x \rangle = 0.$$

□

2.3 O Espaço ℓ^2 e o teorema de Riesz-Fischer

Definição 2.3.1. Definimos o espaço ℓ^p , $p \in [1, +\infty[$, como o espaço normado $(P, \|\cdot\|_p)$ em que

$$P = \{(a_1, a_2, \dots) : a_i \in \mathbb{F} \forall i \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p < +\infty\}.$$

Com

$$\alpha(a_n)_{n \in \mathbb{N}} + (b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\alpha a_n + \beta b_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

para $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ e $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in P$. E com a norma $\|a\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p}$. Onde \mathbb{F} é \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Observação. Quando falamos de ℓ^p no contexto de um espaço vetorial X , assumimos que ℓ^p está definido sobre o mesmo corpo \mathbb{F} de X . Quando falamos de ℓ^p independentemente de outro espaço vetorial, consideramos que ℓ^p pode estar definido sobre \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Dentre os espaços ℓ^p , o espaço ℓ^2 toma particular relevância sendo o único espaço que admite um produto interno. Este é:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i \quad \forall x, y \in \ell^2.$$

Além disso, podemos garantir que o espaço ℓ^2 é um espaço de Hilbert:

Teorema 2.3.1. *O espaço ℓ^2 é um espaço de Hilbert.*

Demonstração. Sabendo que a norma induzida é $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|_2$, basta provar que com tal norma ℓ^2 é um espaço de Banach.

Seja $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $v_k = (v_{k1}, v_{k2}, \dots) \in \ell^2$, uma sequência de Cauchy de elementos de ℓ^2 . Isto é, para $\varepsilon > 0$ qualquer, existe n_0 tal que $n, m > n_0$:

$$\|v_n - v_m\| = \left[\sum_{i=1}^{\infty} |v_{ni} - v_{mi}|^2 \right]^{\frac{1}{2}} < \varepsilon. \quad (2.2)$$

Que implica:

$$|v_{ni} - v_{mi}| < \varepsilon^2 \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Como $(v_{ni} - v_{mi}) \in \mathbb{C}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e \mathbb{C} é completo, existe $v_{*i} \in \mathbb{R}$ tal que $v_{ni} \rightarrow v_{*i}$ quando $n \rightarrow \infty$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Mostraremos então que $v_* = (v_{*i})_{i \in \mathbb{N}}$ está em ℓ^2 e que $v_n \rightarrow v_*$ quando $n \rightarrow \infty$.

Por (2.2), para quaisquer $m, n > n_0$ e $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^k |v_{ni} - v_{mi}|^2 < \varepsilon^2.$$

Levando $m \rightarrow \infty$,

$$\sum_{i=1}^k |v_{ni} - v_{*i}|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Tome agora a sequência $a_k = \sum_{i=1}^k |v_{ni} - v_{*i}|^2, k \in \mathbb{N}$. Como $a_k \in \mathbb{R}$ é monótona e limitada, converge. Daí,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |v_{ni} - v_{*i}|^2 \leq \varepsilon^2. \quad (2.3)$$

Com isso, $(v_{ni} - v_{*i})_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^2$. Pela desigualdade triangular, para qualquer $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k |v_{ni} - (v_{ni} - v_{*i})|^2 &\leq \sum_{i=1}^k |v_{ni}|^2 + \sum_{i=1}^k |v_{ni} - v_{*i}|^2 \\ \sum_{i=1}^k |v_{*i}|^2 &\leq \sum_{i=1}^k |v_{ni}|^2 + \sum_{i=1}^k |v_{ni} - v_{*i}|^2 \\ \sum_{i=1}^k |v_{*i}|^2 &\leq \|v_n\|^2 + \|(v_{ni} - v_{*i})_{i \in \mathbb{N}}\|^2. \end{aligned}$$

Mais uma vez, como $(\sum_{i=1}^k |v_{*i}|^2)_{k \in \mathbb{N}}$ é monótona e limitada, $(\sum_{i=1}^k |v_{*i}|^2)_{k \in \mathbb{N}}$ converge em \mathbb{R} e portanto $v_* \in \ell^2$.

Por fim, (2.3) garante que $\|v_n - v_*\| \leq \varepsilon^2$, como v_n é uma sequência de Cauchy arbitrária, ℓ^2 é completo. \square

Teorema 2.3.2 (Riesz-Fischer). *Todo espaço de Hilbert separável de dimensão infinita é isomorfo ao espaço ℓ^2 .*

Demonstração. (Bijeção.) Seja $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço de Hilbert separável com dimensão infinita. Como H é separável, admite uma base de Schauder ortonormal (e_1, e_2, \dots) . Considere agora a função $G : H \rightarrow \{(\langle f, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}} : f \in H\}$ onde $G(f) = (\langle f, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$, associa a cada elemento $f \in H$ a sequência dos coeficientes de sua expansão de Fourier

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n.$$

Pela desigualdade de Bessel, $\forall f \in H$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2 \leq \|f\|^2 < +\infty.$$

Vemos então que a imagem de G está contida em ℓ^2 .

De imediato temos que G é injetora, uma vez que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de Schauder e assim a sequência associada à expansão de qualquer $f \in H$ é única.

A prova da sobrejeção de $G : H \rightarrow \ell^2$ vem pelo argumento seguinte. Tome $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ arbitrário. Temos $\sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^2 < +\infty$ e, para $k \in \mathbb{N}$ qualquer:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^k y_n e_n \right\|^2 &= \left\langle \sum_{n=1}^k y_n e_n, \sum_{m=1}^k y_m e_m \right\rangle \\ &= \sum_{n=1}^k y_n \left\langle e_n, \sum_{m=1}^k y_m e_m \right\rangle = \sum_{n=1}^k \sum_{m=1}^k y_n \overline{y_m} \langle e_n, e_m \rangle \\ &= \sum_{n=1}^k \sum_{\substack{m=1, \\ m \neq n}}^k |y_n|^2 \underbrace{\langle e_n, e_m \rangle}_0 + \sum_{n=1}^k |y_n|^2 \underbrace{\langle e_n, e_n \rangle}_1 \\ &= \sum_{n=1}^k |y_n|^2 \therefore \sum_{n=1}^{\infty} y_n e_n \text{ converge em } H. \end{aligned}$$

Note que só podemos afirmar que $\sum_{n=1}^{\infty} y_n e_n$ converge em H uma vez que identificamos que $(\sum_{i=1}^n y_i e_i)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em H que é completo. Com isso, como $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é arbitrário, temos que $G : H \rightarrow \ell^2$ é sobrejetora e portanto uma bijeção.

(Preservação da estrutura linear.) Podemos também verificar que, $\forall a, b \in \mathbb{F}$ e $\forall f, g \in H$:

$$\begin{aligned} G(af + bg) &= (\langle af + bg, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}} = (\langle af, e_n \rangle + \langle bg, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \\ &= (a\langle f, e_n \rangle + b\langle g, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}} = (a\langle f, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}} + (b\langle g, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \\ &= a(\langle f, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}} + b(\langle g, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}} = aG(f) + bG(g). \end{aligned}$$

Ou seja, G é uma transformação linear.

(Preservação do produto interno.)

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n, \sum_{m=1}^{\infty} \langle g, e_m \rangle e_m \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle \langle f, e_n \rangle e_n, \sum_{m=1}^{\infty} \langle g, e_m \rangle e_m \right\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \langle \langle f, e_n \rangle e_n, \langle g, e_m \rangle e_m \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle \overline{\langle g, e_m \rangle} \langle e_n, e_m \rangle \end{aligned}$$

Como B é ortonormal,

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m=1, \\ m \neq n}}^{\infty} \langle f, e_n \rangle \overline{\langle g, e_m \rangle} \underbrace{\langle e_n, e_m \rangle}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle \overline{\langle g, e_n \rangle} \underbrace{\langle e_n, e_n \rangle}_1 \\ &= \langle (\langle f, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}, (\langle g, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \rangle_2. \end{aligned}$$

Além disso, veja que, para quaisquer $f, g \in H$, como $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é ortonormal,

$$\|Gf - Gg\|_2^2 = \langle Gf - Gg, Gf - Gg \rangle_2 = \langle f - g, f - g \rangle = \|f - g\|^2.$$

Portanto, G é contínua em H e G^{-1} é contínua em ℓ^2 .

Por fim, a transformação linear G é uma bijeção que preserva o produto interno, isto é um isomorfismo. Dizemos então que H é isomorfo a ℓ^2 . \square

Corolário 2.3.2.1. *Seja H um espaço de Hilbert separável e $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma base de Schauder ortonormal em H . Então para qualquer $f \in H$:*

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2. \quad (\text{Identidade de Parseval})$$

Demonstração. Nas condições do teorema 2.3.2 tome qualquer $f \in H$. Pela preservação do produto interno temos:

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \langle (\langle f, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}, (\langle f, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \rangle_2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2.$$

□

Observação. Enquanto estabelecemos a identidade de Parseval para bases de Schauder ortonormais, pode ser interessante estudar como o espaço ℓ^2 afeta bases de Schauder quaisquer em um espaço de Hilbert H . Para isso, chamamos uma base de Schauder $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de H de “base de Hilbert” se satisfizer a seguinte relação:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \quad \text{converge se} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty.$$

para qualquer sequência de escalares $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Enquanto não nos aprofundarmos no estudo de bases de Hilbert, no capítulo 4 exploramos algumas ideias relacionadas (veja, por exemplo, o teorema 4.1.7).

Capítulo 3

Sequências completas e dualidade

3.1 Sequências completas em espaços de Banach

A definição da base de Schauder é baseada, dentre outras coisas, na ideia de uma sequência de vetores (b_1, b_2, \dots) que possibilita a representação de qualquer vetor no espaço por uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ de forma única. Por outro lado, dizemos que uma série como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge se as somas $\sum_{n=1}^m a_n b_n$ “consistentemente aproximam algum vetor f a qualquer nível de precisão ε ”.

Com isso em mente, voltamos nossa atenção para estudar uma classe de sequências que ainda representa certos aspectos da essência de uma base de Schauder mas significativamente relaxa seus requisitos.

Definição 3.1.1 (Sequência completa). Dizemos que uma sequência de vetores $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em um espaço vetorial normado X é completa se o espaço gerado por esta é denso em X , isto é, se para qualquer $x \in X$ e $\forall \varepsilon > 0$ existe uma combinação linear $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$ que satisfaz:

$$\|x - (c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n)\| < \varepsilon.$$

Uma significativa, mas talvez sutil, diferença entre sequências completas e bases de Schauder é que, enquanto uma base de Schauder (b_1, b_2, \dots) , em um espaço de Banach X , declara a existência de uma sequência (a_1, a_2, \dots)

para qualquer vetor $x \in X$, sequência que nos permite o aproximar para qualquer $\varepsilon > 0$:

$$\|x - \sum_{i=1}^n a_i b_i\| < \varepsilon,$$

uma sequência completa (x_1, x_2, \dots) declara a existência de c_1, \dots, c_m para cada $\varepsilon > 0$. Isto é, uma sequência completa não garante a existência de uma sequência $(c_1, c_2, \dots, c_m, \dots)$ cuja série convergiria a x . Muito menos que se essa sequência existir que ela seja única.

Definição 3.1.2 (Dual topológico). Se X é um espaço normado, chamamos de *dual topológico* (ou simplesmente *dual*) o conjunto X^* de todos os funcionais lineares contínuos $\varphi : X \rightarrow \mathbb{F}$. Onde \mathbb{F} é \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Observação. Chamamos $\varphi : X \rightarrow \mathbb{F}$ de “funcional” para explicitar que φ é uma função que leva vetores de X ao corpo \mathbb{F} sob o qual X está definido.

Um resultado elementar associado ao dual topológico é que ele pode ser tratado como um espaço vetorial. De fato, se, para $\varphi, \phi \in X^*$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, definirmos $(\alpha\varphi + \beta\phi)(x) = \alpha\varphi(x) + \beta\phi(x)$ para todo $x \in X$, então $\alpha\varphi + \beta\phi \in X^*$ e X^* respeita todos os axiomas que definem um espaço vetorial. Se além disso definirmos:

$$\|\varphi\| = \sup_{x \in X} \frac{|\varphi(x)|}{|x|},$$

podemos ainda mostrar que este é um espaço de Banach (corolários 3.1.1.1 e 3.1.2.1).

Observação. Assim como adotamos a notação de “funcional” para funções de um espaço vetorial ao corpo sob o qual é definido, é igualmente útil considerarmos uma nova notação para funções entre espaços normados quaisquer. Chamaremos de “operador” uma função $X \mapsto Y$, onde X e Y são espaços normados.

Uma resultado importante no estudo de operadores lineares é o seguinte:

Teorema 3.1.1. *Sejam X e Y espaços normados e $E \subset X$, um operador linear $T : E \rightarrow Y$ será contínuo se, e somente se, for limitado. Isto é, se:*

$$\sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| < +\infty.$$

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que $T : E \rightarrow Y$ é um operador linear contínuo em X . Em particular, T é contínuo em 0. Seja $\varepsilon > 0$ qualquer fixo, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\|x - 0\| < \delta \implies \|T(x) - T(0)\| < \varepsilon.$$

Como T é linear, veja que $T(0) = 0 \cdot T(0) = 0$ e para qualquer $x \in X$ com $\|x\| = 1$, $\|\frac{\delta}{2}x\| < \delta$. Assim, para todo $x \in X$ com $\|x\| = 1$

$$\|T(x)\| = \left\| \frac{T(\frac{\delta}{2}x)}{\delta/2} \right\| < \frac{2\varepsilon}{\delta}.$$

Por fim,

$$\sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| \leq \frac{2\varepsilon}{\delta} < +\infty.$$

(\Leftarrow) Seja $T : E \rightarrow Y$ um operador linear e limitado. Então

$$\sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = c < +\infty.$$

Portanto, para qualquer $x_0 \in X$ e qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \varepsilon/c$ tal que, se $\|x_0 - x\| < \delta$:

$$\begin{aligned} \|T(x_0) - T(x)\| &= \|T(x_0 - x)\| = \left\| \delta T \left(\frac{x_0 - x}{\delta} \right) \right\| \\ &\leq \delta \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|T(x)\| = \varepsilon. \end{aligned}$$

Como a escolha de $x_0 \in X$ é arbitrária, T é contínua em X . □

Corolário 3.1.1.1. *Se X é um espaço normado sob \mathbb{F} , um funcional linear $\varphi : X \rightarrow \mathbb{F}$ será contínuo se, e somente se, for limitado. Isto é, se*

$$\sup_{\|x\|=1} |\varphi(x)| < +\infty.$$

Para dois espaços vetoriais normados $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sobre um mesmo campo \mathbb{F} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}), o conjunto $B(X, Y)$ de operadores lineares contínuos $X \mapsto Y$ define um espaço vetorial com as operações

$$(\alpha T + \beta S)(x) = \alpha T x + \beta S x, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \quad T, S \in B(X, Y).$$

Ainda, se $T : X \rightarrow Y$ é um operador linear contínuo, definimos como a norma de T o seguinte valor:

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X=1}} \|Tx\|_Y. \quad (3.1)$$

Uma propriedade notável e imediata da definição da norma operacional é a seguinte:

$$\|T(x)\|_Y \leq \|T\| \cdot \|x\|_X.$$

Teorema 3.1.2. *Se X é um espaço normado e Y um espaço de Banach, o espaço normado $B(X, Y)$ dos operadores lineares contínuos de X a Y é um espaço de Banach*

Demonstração. Seja $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $B(X, Y)$, então para qualquer $x \in X$ fixo e $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe n_0 tal que se $n, m > n_0$:

$$\|T_n - T_m\| < \frac{\varepsilon}{\|x\|} \implies \|T_n x - T_m x\| < \varepsilon.$$

Portanto, para todo x , $(T_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ é Cauchy. Como Y é completo, para todo x existe $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n x \in Y$. Definimos então $T : X \rightarrow Y$ como um operador tal que $Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$. Pelo teorema 2.1.1, T é um operador linear. Agora, para $\varepsilon > 0$ arbitrário existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n, m > n_0$,

$$\|T_n x - T_m x\| < \varepsilon$$

para todo $\|x\| = 1$. Assim, $\|Tx - T_m x\| \leq \varepsilon$ para todo $\|x\| = 1$. Daí

$$\begin{aligned} \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| &= \sup_{\|x\|=1} \|Tx - T_m x + T_m x\| \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} \|Tx - T_m x\| + \|T_m x\| \\ &\leq \varepsilon + \|T_m x\| < +\infty. \end{aligned}$$

Ou seja, $T \in B(X, Y)$ e $B(X, Y)$ é completo. □

Corolário 3.1.2.1. *O espaço dual X^* associado à norma*

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\|=1} |\varphi(x)|, \quad \varphi \in X^*.$$

é um espaço de Banach, para X um espaço normado qualquer.

Demonstração. Definimos como dual X^* o espaço $B(X, \mathbb{F})$ para $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Como em ambos os casos \mathbb{F} é um espaço normado completo com a norma $|\cdot|$, X^* é um espaço de Banach. \square

Os funcionais e operadores lineares são ferramentas fundamentais no estudo da Análise Funcional. Tendo em vista isso, dedicamos o resto dessa seção para discutir relações entre grandes resultados¹ dessa área da matemática e os nossos objetos de estudo: espaços de dimensão infinita.

Teorema 3.1.3 (Hahn-Banach). *Se X é um espaço normado, E um subespaço vetorial de X e $\varphi \in E^*$. Então existe $\psi \in X^*$ tal que $\psi|_E = \varphi$ e $\|\psi\| = \|\varphi\|$.*

O teorema de Hahn-Banach, como um argumento sobre subespaços vetoriais, é particularmente útil para o estudo de sequências completas, uma vez que uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X é completa se o subespaço de X gerado por ela for denso em X . Podemos então produzir o seguinte resultado:

Teorema 3.1.4. *Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ é completa em X se, e somente se, a seguinte afirmação for verificada:*

Se $\varphi \in X^$ for tal que $\varphi(x_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\varphi = 0$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência completa em X e seja $\varphi \in X^*$ tal que $\varphi(x_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então para qualquer $x \in X$ arbitrário existe $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{span}(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $s_n \rightarrow x$. Porém, como s_n são combinações lineares de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\varphi(s_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como φ é contínua,

$$\varphi(x) = \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} s_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

Como x é arbitrário, $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in X$. $\varphi = 0$.

(\Leftarrow) Assumimos que se $\varphi \in X^*$ é tal que $\varphi(x_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\varphi = 0$. Suponha agora que $W = \text{span}(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ não é denso em X , ou seja, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não é completa. Portanto, existe $x^* \in X$ tal que $x^* \notin \overline{W}$. Seja $\delta = \inf_{y \in W} \|x^* - y\|$, então $\delta > 0$. Com isso, definimos $E = \text{span}\{x_1, x_2, \dots, x^*\} \subset X$ e $\varphi : E \rightarrow \mathbb{F}$ como

$$\varphi(cx^* + y) = c\delta, \quad c \in \mathbb{F}, y \in W.$$

¹Para não fugir do foco deste texto, omitimos as demonstrações desses grandes teoremas. Contudo, o leitor interessado não terá dificuldade de encontrar demonstrações em livros de Análise Funcional, como os citados na bibliografia.

φ é claramente linear. Mostraremos agora que é limitado: Primeiro, veja que

$$|\varphi(cx^* + y)| = |c|\delta \leq |c|\|x^* + y/c\| = \|cx^* + y\|$$

para qualquer $y \in W$. Portanto,

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\|=1} |\varphi(x)| \leq \sup_{\|x\|=1} \|x\| = 1$$

Além disso,

$$\|\varphi\| = \sup_{x \in E} \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|} \geq \sup_{y \in W} \frac{|\varphi(x^* - y)|}{\|x^* - y\|} = \frac{\delta}{\delta} = 1.$$

Então temos que $\|\varphi\| = 1$. Pelo teorema de Hahn-Banach, existe $\psi : X \rightarrow \mathbb{F}$ tal que $\psi|_E = \varphi$, com $\psi(x_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e $\|\psi\| = 1$. Portanto, $\psi \neq 0$. Um absurdo. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é completa. \square

Teorema 3.1.5 (Teorema da Representação de Riesz). *Seja H um espaço de Hilbert, para todo $\varphi \in H^*$, existe um vetor $z \in X$, único, com $\|z\| = \|\varphi\|$, tal que*

$$\varphi(x) = \langle x, z \rangle.$$

É fácil verificar, na direção oposta, que em um espaço de Hilbert H , para qualquer $z \in H$, $\langle x, z \rangle$ define um funcional linear limitado em H : Pela definição do produto interno, temos que $\varphi(x) = \langle x, z \rangle$ é um funcional linear. Agora, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que φ é limitado:

$$|\varphi(x)| \leq \|x\|\|z\|.$$

Com o teorema da representação de Riesz, conseguimos verificar que, em espaços de Hilbert, sequências completas tem uma particular conotação geométrica:

Teorema 3.1.6. *Se H é um espaço de Hilbert, uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ é completa se, e somente se, para $y \in H$:*

$$\langle x_n, y \rangle = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \implies y = 0$$

Demonstração. Pelo teorema 3.1.4, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é completa se, e somente se, $\varphi \in H^*$ com $\varphi(x_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ implicar que $\varphi = 0$.

Porém, pelo teorema da representação de Riesz, $\varphi = 0$ se, e somente se, $\varphi(x) = \langle x, 0 \rangle$. Assim, temos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ será completa se, e somente se, $\langle x_n, y \rangle = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ implicar $y = 0$. \square

Teorema 3.1.7 (Teorema da Aplicação Aberta). *Sejam X e Y espaços de Banach. Se $T : X \rightarrow Y$ é um operador linear contínuo e sobrejetor, então T é uma aplicação aberta. Isto é, para qualquer aberto $U \subseteq X$, a imagem $T(U)$ é aberta em Y .*

Consequentemente, se T for um operador linear contínuo e bijetor, sua inversa T^{-1} é contínua: Temos que T é uma aplicação aberta, para qualquer $B_\varepsilon(x) \subseteq X$ aberto, $T(B_\varepsilon(x)) \subseteq Y$ também será aberto, com isso, existe algum $\delta > 0$ tal que $B_\delta(Tx) \subseteq T(B_\varepsilon(x))$. Aplicando a inversa de T ,

$$T^{-1}(B_\delta(Tx)) \subseteq B_\varepsilon(x) = B_\varepsilon(T^{-1}(Tx)).$$

Ou seja, T^{-1} é contínuo em todo $Tx \in X$, como T é sobrejetor, T^{-1} é contínuo em X .

Teorema 3.1.8 (Teorema da Limitação Uniforme). *Seja X um espaço de Banach e Y um espaço vetorial normado. Se um conjunto \mathcal{F} de operadores lineares contínuos de X a Y satisfaz*

$$\sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\| < +\infty$$

para todo $x \in X$, então \mathcal{F} é uniformemente limitado, isto é:

$$\sup_{T \in \mathcal{F}} \|T\| < +\infty.$$

3.2 Funcionais de coeficiente

Um espaço de Banach com uma base de Schauder (x_1, x_2, \dots) nos permite representar qualquer vetor x como uma série única:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$$

Pelo teorema 2.1.1 vemos que c_n é uma função linear de x . Denotando c_n , como uma função de x , por $f_n(x)$ podemos escrever:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) x_n.$$

Os funcionais f_n ($\forall n \in \mathbb{N}$) definidos acima são então chamados de **funcionais de coeficiente**.

Definição 3.2.1 (Operador de soma parcial). Sejam X um espaço de Banach, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma base de Schauder de X e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência de funcionais de coeficiente associados. Chamamos de “ n -ésimo operador de soma parcial” o operador $S_n : X \rightarrow X$:

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)x_i$$

para qualquer n nos naturais.

Note que a linearidade do operador de soma parcial é uma consequência imediata da linearidade dos funcionais de coeficiente. Provamos a seguir algumas propriedades.

Teorema 3.2.1. *Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de Schauder de um espaço de Banach X e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é a sequência de funcionais de coeficiente associada, então existe uma constante M tal que:*

$$1 \leq \|x_n\| \cdot \|f_n\| \leq M$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Seja Y o espaço vetorial de sequências $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ para as quais $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ converge em X . Podemos definir para Y uma norma:

$$\|(c_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_Y = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^n c_i x_i \right\|.$$

De fato, $\|\cdot\|_Y$ satisfaz todas as propriedades de uma norma. Além disso, podemos provar que $(Y, \|\cdot\|_Y)$ é um espaço de Banach. Provaremos agora que Y é isomorfo a X .

Considere o seguinte operador $T : Y \rightarrow X$ definido por:

$$T((c_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n.$$

T é um operador linear (teorema 2.1.1), e como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de Schauder, T é injetor (todo vetor de X admite uma sequência única em Y) e sobrejetor. Além disso, T é sobrejetora pela definição de Y .

T é contínua, pois

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \right\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^n c_i x_i \right\| = \|(c_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_Y.$$

Para qualquer $\varepsilon > 0$ basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, $\|(b_n)_{n \in \mathbb{N}} - (c_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_Y < \delta$ garante:

$$\begin{aligned} \|T((b_n)_{n \in \mathbb{N}}) - T((c_n)_{n \in \mathbb{N}})\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \right\| \\ &\leq \|(b_n)_{n \in \mathbb{N}} - (c_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_Y \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Aplicação Aberta (3.1.7), T^{-1} também é contínua. Portanto, X e Y são isomorfos.

Tome $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ arbitrário. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |f_n(x)| = |c_n| &= \frac{\|c_n x_n\|}{\|x_n\|} \leq \frac{\|\sum_{i=1}^n c_i x_i\| + \|\sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i\|}{\|x_n\|} \\ &\leq \frac{2 \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\sum_{i=1}^n c_i x_i\|}{\|x_n\|} = \frac{2\|(c_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_Y}{\|x_n\|} = \frac{2\|T^{-1}(x)\|_Y}{\|x_n\|} \\ &\leq \frac{2\|T^{-1}\| \cdot \|x\|}{\|x_n\|}. \end{aligned}$$

Tomando $M = 2\|T^{-1}\| \cdot \|x\|$ temos que:

$$\|x_n\| \cdot \|f_n\| \leq M.$$

Por fim,

$$1 = f_n(x_n) \leq \|f_n\| \cdot \|x_n\|.$$

□

Corolário 3.2.1.1. *Os funcionais de coeficiente $f_n(x)$ são funcionais lineares limitados.*

Corolário 3.2.1.2. *Os operadores de soma parcial são limitados. Em particular,*

$$1 \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_n\| < +\infty.$$

Demonstração. Para todo $n \in \mathbb{N}$, S_n :

$$\|S_n\| = \sup_{\|x\|=1} \left\| \sum_{i=1}^n f_i(x)x_i \right\| \leq \sup_{\|x\|=1} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)x_i \right\| = \sup_{\|x\|=1} \|x\| = 1$$

Para todo $x \in X$ fixo arbitrário,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_n(x)\| \leq \|x\| < +\infty.$$

Pelo teorema da limitação uniforme (3.1.8), temos $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_n\| < +\infty$. A desigualdade final segue do teorema 3.2.1:

$$\begin{aligned} 1 &\leq \|x_1\| \|f_1\| = \|x_1\| \sup_{\|x\|=1} |f_1(x)| \\ &= \sup_{\|x\|=1} |f_1(x)| \|x_1\| = \sup_{\|x\|=1} \|f_1(x)x_1\| \\ &= \|S_1\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_n\| \end{aligned}$$

□

A fim de melhor entender a relação de espaços de dimensão infinita com bases de Schauder, identificamos características necessárias de sequências que se candidatam a serem bases e dos espaços que as contém. No entanto, a verificação de uma sequência como base pode ainda trazer dificuldades. Com a familiaridade que construímos com os operadores de soma parcial, trazemos uma importante condição que caracteriza bases de Schauder:

Teorema 3.2.2. *Uma sequência de vetores não-nulos completa $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ em um espaço de Banach é uma base de Schauder de X se, e somente se, existe uma constante M tal que, para quaisquer escalares c_1, c_2, \dots, c_m , com $n \leq m$:*

$$\left\| \sum_{i=1}^n c_i x_i \right\| \leq M \left\| \sum_{i=1}^m c_i x_i \right\|. \quad (3.2)$$

Demonstração. (\Rightarrow) Assumindo que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de Schauder, basta tomar $M = \sup_n \|S_n\|$, para S_n o operador de soma parcial de tamanho n associado à sequência de vetores $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ completa, assim, para quaisquer $n \leq m$:

$$S_n \left(\sum_{i=1}^m c_i x_i \right) = \sum_{i=1}^n c_i x_i.$$

E com isso,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n c_i x_i \right\| &= \left\| S_n \left(\sum_{i=1}^m c_i x_i \right) \right\| \\ &\leq \|S_n\| \cdot \left\| \sum_{i=1}^m c_i x_i \right\| \\ &\leq M \left\| \sum_{i=1}^m c_i x_i \right\|. \end{aligned}$$

Por fim, o fato de que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não contém vetores nulos é uma consequência imediata da definição de uma base de Schauder.

(\Leftarrow) Assumindo que a expressão (3.2) do enunciado é satisfeita para quaisquer c_1, \dots, c_m , fixamos $x \in X$ arbitrário e tomamos escalares c_{i1}, \dots, c_{in} e $n = 1, 2, \dots$ tais que:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n c_{in} x_i. \quad (3.3)$$

Note que podemos afirmar isso pela suposição de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como uma sequência de vetores completos.

Para facilitar a notação, “estendemos” cada c_{i1}, \dots, c_{in} à uma sequência $(c_{in})_{n \in \mathbb{N}}$ em que

$$c_{in} = 0, \text{ para } i > n. \quad (3.4)$$

Agora, tome k fixo e $m \geq n > k$. Temos por hipótese,

$$\begin{aligned} \|(c_{km} - c_{kn})x_k\| &\leq M \left\| \sum_{i=1}^n (c_{im} - c_{in})x_i \right\| \leq M^2 \left\| \sum_{i=1}^m (c_{im} - c_{in})x_i \right\| \\ &= M^2 \left\| \sum_{i=1}^m c_{im}x_i - \sum_{i=1}^n c_{in}x_i \right\|. \end{aligned}$$

Com $m, n \rightarrow \infty$,

$$M^2 \left\| \sum_{i=1}^n c_{in}x_i - \sum_{i=1}^m c_{im}x_i \right\| \rightarrow 0,$$

pela convergência em (3.3).

Como $x_k \neq 0$, $|c_{kn} - c_{km}| \rightarrow 0$, com $m, n \rightarrow \infty$. Portanto $(c_{kn})_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ é uma sequência de Cauchy em um espaço completo, que então converge. Tomamos c_k tal que

$$c_{kn} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c_k,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Provaremos a seguir que, de fato, $x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i &= \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} c_{in} x_i = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \lim_{n \rightarrow \infty} c_{in} x_i \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m c_{in} x_i. \end{aligned}$$

Agora, usando um teorema para limites iterados², podemos trocar a ordem das operações de tomada dos limites acima. Assim, com a condição (3.4), obtemos

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m c_{in} x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n c_{in} x_i = x.$$

Para provar a unicidade de $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, suponha que $\sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i \rightarrow x$ e $\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i \rightarrow x$. Como ambas séries convergem, pelo teorema 2.1.1,

$$\sum_{i=1}^n (b_n - c_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x - x = 0.$$

Porém, para qualquer $k \in \mathbb{N}$:

$$\|(b_k - c_k)x_k\| \leq M \left\| \sum_{i=1}^n (b_n - c_n) \right\|.$$

Tomando $n \rightarrow \infty$, temos que $\|(b_k - c_k)x_k\| = 0$ e, como $x_k \neq 0$, $b_k = c_k$. Como k é arbitrário provamos a unicidade e finalizamos demonstração. \square

3.3 Dualidade e bi-ortogonalidade

Agora que contextualizamos o comportamento dos funcionais de coeficiente em espaços de Banach separáveis, voltamos nossa atenção a estudar seu comportamento no espaço de funcionais lineares em X , o espaço dual X^* . Um

²Veja por exemplo Bartle (1976), Iterated Limit Thm, p.133.

paralelo que talvez seja antecipado é o de que, se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de Schauder em X , os funcionais de coeficiente associados, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sejam uma base de Schauder em X^* . No entanto, tal expectativa não necessariamente reflete a realidade. A fim de estudar como a base $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se relaciona ao espaço X^* , voltamos nossa atenção a um subconjunto de X^* , o fecho do espaço gerado pelos funcionais de coeficiente, $\overline{\text{span}(f_n)_{n \in \mathbb{N}}}$.

Teorema 3.3.1. *Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma base de Schauder para um espaço de Banach X e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência de funcionais de coeficiente associados. Então $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de Schauder para $\overline{\text{span}(f_n)_{n \in \mathbb{N}}}$ e a expansão:*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n) f_n$$

é válida para todo $f \in \overline{\text{span}(f_n)_{n \in \mathbb{N}}}$.

Demonstração. Como o n -ésimo operador de soma parcial $S_n : X \rightarrow X$ é linear e contínuo, podemos considerar o seu operador adjunto $S_n^* : X^* \rightarrow X^*$, que é, por definição, para $x \in X$ e $f \in X^*$:

$$S_n^* f(x) = f(S_n x) = f\left(\sum_{i=1}^n f_i(x) x_i\right) = \sum_{i=1}^n f(x_i) f_i(x).$$

Isto é, S_n^* é um operador entre espaços duais que, para cada funcional $f : X \rightarrow \mathbb{F}$ define um funcional $S_n^* f : X \rightarrow \mathbb{F}$, onde $S_n^* f(x) = f(S_n x)$ para todo $x \in X$. Como $S_n^* f$ é uma combinação linear de funcionais lineares, $S_n^* f \in X^*$ para todo $f \in X^*$. Além disso, temos para qualquer $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|S_n^*\| &= \sup_{\|f\|=1} \|S_n^* f\| = \sup_{\|f\|=1} \left(\sup_{\|x\|=1} \|f(S_n x)\| \right) \\ &\leq \sup_{\|f\|=1} \left(\sup_{\|x\|=1} \|f\| \|S_n\| \|x\| \right) \leq \sup_{\|f\|=1} \|f\| \|S_n\| \\ &\leq \|S_n\|. \end{aligned}$$

Ou seja, $\|S_n^*\| < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_n^*\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_n\| < +\infty$ (corolário 3.2.1.2).

Provaremos agora que de fato $S_n^* f \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ para todo $f \in \overline{\text{span}(f_n)_{n \in \mathbb{N}}}$.

Com $f \in \overline{\text{span}(f_n)_{n \in \mathbb{N}}}$, se f é uma combinação linear finita de funcionais de coeficiente, podemos escrever $f = \sum_{i=1}^m c_i f_i$ para c_1, c_2, \dots, c_m escalares. Daí, para qualquer $n \geq m$,

$$S_n^* f = \sum_{i=1}^n f(x_i) f_i(x) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m c_j f_j(x_i) \right) f_i(x) = \sum_{i=1}^m c_i f_i(x) = f.$$

Naturalmente, $S_n^* f \rightarrow f$.

Agora, se f não for combinação linear finita de funcionais de coeficiente, é um ponto de acumulação do espaço gerado por estas. Então, para $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $g = \sum_{i=1}^m c_i f_i$ para algum $m \in \mathbb{N}$ tal que $\|f - g\| < \varepsilon / (M + 1)$ para $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_n^*\|$. Então para todo $n \geq m$:

$$\begin{aligned} \|S_n^* f - f\| &\leq \|S_n^* f - S_n^* g\| + \|S_n^* g - g\| + \|g - f\| \\ &= \|S_n^* f - S_n^* g\| + \|f - g\| \\ &\leq \|S_n^*\| \|f - g\| + \|f - g\| \\ &= (\|S_n^*\| + 1) \|f - g\| = \varepsilon. \end{aligned}$$

Temos então que $S_n^* f \rightarrow f$. Agora, suponha que f admite uma representação alternativa $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$. Para qualquer $m \in \mathbb{N}$:

$$f(x_m) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x_m) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{\infty} c_n \cdot 0 + c_m \cdot 1 = c_m.$$

Daí temos que $c_m = f(x_m)$ para todo $m \in \mathbb{N}$, portanto, a representação de f por $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) f_i$ é única, então $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de Schauder de $\text{span}(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. \square

Como, para X um espaço vetorial, X^* também é um espaço vetorial, podemos definir em X^* um espaço dual $(X^*)^* = X^{**}$, chamado de *espaço bidual*. O espaço bidual inspira a definição de uma aplicação $X \mapsto X^{**}$ como a seguir:

Para todo $x \in X$ associamos $\hat{x} \in X^{**}$ definido por:

$$\hat{x}(f) = f(x), \quad f \in X^*.$$

A aplicação é chamada de *aplicação canônica de X em X^{**}* . Se essa aplicação for sobrejetora, chamamos o espaço X de reflexivo. Provaremos a seguir que tais espaços vetoriais são receptivos a mais conclusões acerca da sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Teorema 3.3.2. *Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base para um espaço de Banach reflexivo X , então a sequência de funcionais de coeficiente associados $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de Schauder de X^* .*

Demonstração. Uma vez que já sabemos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de Schauder de $\text{span}(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é suficiente mostrar que $\text{span}(f_n)_{n \in \mathbb{N}} = X^*$. Isto é, que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é completa em X^* .

Queremos então mostrar que para todo $f \in X^*$ e $\varepsilon > 0$ existe uma combinação linear $\sum_{i=1}^n c_i f_i$ tal que $\|f - \sum_{i=1}^n c_i f_i\| < \varepsilon$. Ou, de forma equivalente, que se $\mu \in X^{**}$ e $\mu(f_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mu = 0$ (teorema 3.1.4).

Seja $X \mapsto X^{**}$ a aplicação canônica de X em X^{**} ,

$$\hat{x}(f) = f(x), \quad x \in X, f \in X^*.$$

Como X é reflexivo, $\mu = \hat{x}$ para algum $x \in X$. Como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de X , se $f_n(x) = \hat{x}(f_n) = 0$, $\forall x \in X, n \in \mathbb{N}$:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{f_n(x)}_0 x_n = 0.$$

Daí, $\mu(f) = \hat{x}(f) = f(0) = 0$. □

A seguir incluímos dois teoremas relacionados a funcionais lineares necessários para aprofundar o nosso estudo de bases de Schauder e suas conexões com o espaço que habitam. Em particular, com relação a espaços de Hilbert.

Teorema 3.3.3. *Para X um espaço normado e φ um funcional linear em X , φ será contínuo se, e somente se, $\text{Ker}(\varphi) = \{x \in X : \varphi(x) = 0\}$ for fechado em X .*

Demonstração. (\Rightarrow) Seja φ um funcional linear contínuo. Queremos mostrar que se x^* é ponto de acumulação de $\text{Ker}(\varphi)$, então $x^* \in \text{Ker}(\varphi)$. Por definição, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|x^* - x\| < \delta$:

$$|\varphi(x^*) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

Como x^* é ponto de acumulação de $\text{Ker}(\varphi)$, podemos sempre tomar $x \in \text{Ker}(\varphi)$ tal que $\|x^* - x\| < \delta$, daí:

$$|\varphi(x^*) - \varphi(x)| = |\varphi(x^*)| < \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, $\varphi(x^*) = 0$ e portanto $x^* \in \text{Ker}(\varphi)$.

(\Leftarrow) Seja φ um funcional linear com $\text{Ker}(\varphi)$ fechado em X . Se $\varphi = 0$, é contínua. Se $\varphi \neq 0$, existe x_0 com $\varphi(x_0) \neq 0$. Tomando $x_1 = \frac{1}{\varphi(x_0)}x_0$ temos $\varphi(x_1) = 1$. Como $\text{Ker}(\varphi)$ é fechado e $x_1 \notin \text{Ker}(\varphi)$, existe $r > 0$ tal que para todo $\|x\| < r$, $x + x_1 \notin \text{Ker}(\varphi)$ (caso contrário x_1 seria ponto de acumulação de $\text{Ker}(\varphi)$).

Agora, veja que $|\varphi(x)| < 1$ para $\|x\| < r$. Caso contrário, existiria $\|x\| < r$ com $|\varphi(x)| \geq 1$, então $\|\frac{-x}{|\varphi(x)|}\| < r$ e $\varphi(x_1 - \frac{x}{|\varphi(x)|}) = 0$, um absurdo.

Por fim, para $x^* \in X$ e $\varepsilon > 0$ quaisquer, basta tomar $\delta = r\varepsilon$. Se $\|x^* - x\| < \delta$ então $\|\frac{x^* - x}{\varepsilon}\| < r$ e:

$$|\varphi(x^*) - \varphi(x)| = |\varphi(x^* - x)| = \varepsilon \underbrace{|\varphi(\frac{x^* - x}{\varepsilon})|}_{\leq 1} \leq \varepsilon.$$

Ou seja, φ é contínua em X . □

Teorema 3.3.4. *Seja X um espaço normado, $E \subseteq X$ um subespaço vetorial de X e $x \in X$. Então $x \in \overline{E}$ se, e somente se, todo funcional linear contínuo em X^* que se anula em E , também se anula em x .*

Demonstração. (\Rightarrow) Seja $x^* \in \overline{E}$. Então para qualquer $\delta > 0$ existe $x \in E$ tal que $\|x^* - x\| < \delta$. Suponha agora que φ seja um funcional linear contínuo que se anula em E . Como φ é contínuo em x^* , para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$\|x^* - x\| < \delta \implies |\varphi(x^*) - \varphi(x)| = |\varphi(x^*)| < \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, temos que $\varphi(x^*) = 0$.

(\Leftarrow) Agora, supomos que todo funcional linear contínuo que se anula em \overline{E} se anula também em algum $x^* \in X$. Supondo então $x^* \notin \overline{E}$, definimos o espaço vetorial $M = \text{span}(\overline{E} \cup \{x^*\})$. Em M definimos o seguinte funcional $\varphi : M \rightarrow \mathbb{F}$:

$$\varphi(cx^* + y) = c, \text{ para } c \in \mathbb{F} \text{ e } y \in \overline{E}.$$

Naturalmente, φ é linear. E, como $\text{Ker}(\varphi) = \{0x^* + y : y \in \overline{E}\}$ é fechado em M , pelo teorema 3.3.3, φ é contínua em M . Como $\overline{E} \subseteq X$, pelo teorema de Hahn-Banach, existe $\psi \in X^*$ tal que $\psi|_M = \varphi$. Então, $\psi|_{\overline{E}} = 0$ e $\psi(x^*) = \varphi(x^*) = 1 \neq 0$. Porém, por hipótese, temos que todo funcional linear contínuo em X que se anula em \overline{E} , também se anula em x^* , um absurdo. Temos então que, necessariamente, $x^* \in \overline{E}$. □

Voltamos nossa atenção agora para estudar como espaços de Hilbert nos permitem analisar a relação entre diferentes sequências de vetores e como estas relações afetam bases de Schauder.

Definição 3.3.1 (Sequências bi-ortogonais). Para um espaço de Hilbert H , dizemos que duas sequências $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ são bi-ortogonais se:

$$\langle x_n, y_m \rangle = \delta_{nm},$$

em que δ_{nm} é o delta de Kronecker (isto é, $\delta_{nm} = 1$ se $n = m$ e $\delta_{nm} = 0$, caso contrário).

Definição 3.3.2 (Sequência minimal). Seja X um espaço vetorial e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em X , dizemos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é *minimal* se para todo $k \in \mathbb{N}$:

$$x_k \notin \left[(x_n)_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \neq k}} \right].$$

Isto é, onde cada elemento não está no fecho do espaço gerado pelos demais.

Noções de ortogonalidade entre vetores usualmente estão acompanhadas de alguma implicação quanto aos espaços gerados por estes. Por exemplo, é um fato recorrente em cursos de álgebra linear que se vetores v_1 e v_2 em \mathbb{R}^n são ditos ortogonais, são necessariamente linearmente independentes. Pode ser natural esperar então, alguma relação entre sequências bi-ortogonais e sequências minimais. De fato:

Teorema 3.3.5. *Seja H um espaço de Hilbert e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$. Existirá $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ bi-ortogonal a $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se, e somente se, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ for minimal.*

Demonstração. (\Rightarrow) Seja $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ bi-ortogonal a $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Suponha agora que, para algum $j \in \mathbb{N}$, $x_j \in [(x_n)_{n \in \mathbb{N}, n \neq j}]$. Então existe $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [(x_n)_{n \in \mathbb{N}, n \neq j}]$ tal que $s_n \rightarrow x_j$. Além disso, temos por hipótese que $\langle x_j, y_j \rangle = 1$ e que $\langle x_i, y_j \rangle = 0$ para todo $i \neq j$. Pela continuidade do produto interno temos que:

$$\langle s_n, y_j \rangle \rightarrow \langle x_j, y_j \rangle = 1,$$

o que é um absurdo, uma vez que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\langle s_n, y_j \rangle = 0$. Ou seja, não existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $x_j \in [(x_n)_{n \in \mathbb{N}, n \neq j}]$.

(\Leftarrow) Suponha que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ é tal que $x_j \notin [(x_n)_{n \in \mathbb{N}, n \neq j}]$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Pelo teorema 3.3.4, existe um funcional linear contínuo $\varphi : H \rightarrow \mathbb{F}$ que se

anula em todo $[(x_n)_{n \in \mathbb{N}, n \neq j}]$ mas não em x_j . Tomando $\psi(x) = \frac{1}{\|x_j\|} \varphi(x)$, temos que ψ é um funcional linear contínuo em H onde:

$$\psi(x_n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = j \\ 0, & \text{se } n \neq j. \end{cases}$$

Pelo teorema da representação de Riesz, existe $y_j \in X$ tal que $\psi(x) = \langle x, y_j \rangle$. Em particular, onde

$$\langle x_n, y_j \rangle = \delta_{nj}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como a escolha de j é arbitrária, podemos definir y_j para todo $j \in \mathbb{N}$. Então, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ é uma sequência bi-ortogonal a $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. \square

Em seguida desenvolvemos uma condição para a unicidade de sequências bi-ortogonais:

Teorema 3.3.6. *Seja H um espaço de Hilbert e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ minimal. Uma sequência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ bi-ortogonal a $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é única se, e somente se, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é completa.*

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é a única sequência bi-ortogonal a $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Agora, supomos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não é uma sequência completa. Pelo teorema 3.1.4, existe $\varphi \in H^*$ tal que $\varphi(x_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ mas $\varphi \neq 0$. Para algum $m \in \mathbb{N}$ fixo qualquer definimos $\psi_1(x) = \langle x, y_m \rangle$ e $\psi_2(x) = \varphi(x) + \langle x, y_m \rangle$. Como $\varphi \neq 0$, $\psi_1 \neq \psi_2$. Então, pelo teorema da representação de Riesz podemos identificar ψ_2 por w , onde $w \neq y_m$. Assim, podemos definir uma sequência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ onde $z_n = y_n$ para $n \neq m$ e $z_m = w$. Como $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é bi-ortogonal a $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mas $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \neq (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, temos um absurdo. Portanto $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência completa.

(\Leftarrow) Suponha que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência completa. Sejam $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ duas sequências bi-ortogonais a $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e seja $m \in \mathbb{N}$ um índice fixo. Definimos $\varphi, \psi : H \rightarrow \mathbb{F}$ como $\varphi(x) = \langle x, y_m \rangle$ e $\psi(x) = \langle x, z_m \rangle$. Então φ_m e ψ_m são funcionais lineares contínuos e, como y_m e z_m elementos de sequências bi-ortogonais a $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\varphi_m(x_m) = \psi_m(x_m) = 1$ e $\varphi_m(x_n) = \psi_m(x_n) = 0$ quando $n \neq m$. Por fim, definimos

$$\phi_m(x) = \varphi_m(x) - \psi_m(x),$$

um funcional linear contínuo tal que $\varphi_m(x_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo teorema 3.1.4, se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é completa, então $\varphi_m = 0$, ou seja, se $y_m = z_m$. Como a escolha de $m \in \mathbb{N}$ é arbitrária, temos que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. \square

Consideramos agora o impacto da bi-ortogonalidade às bases de Schauder. Se H é um espaço de Hilbert com base de Schauder $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, pelo teorema da representação de Riesz, podemos identificar uma sequência $(\tilde{f}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ tal que $f_n(x) = \langle x, \tilde{f}_n \rangle$, onde $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são os funcionais de coeficiente associados a $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Pela definição dos funcionais de coeficiente temos que:

$$\langle x_m, \tilde{f}_n \rangle = f_n(x_m) = \delta_{nm}.$$

Isto é, $(\tilde{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência bi-ortogonal a $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Sendo $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência completa, temos que cada base está associada a uma sequência bi-ortogonal única, $(\tilde{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Assumindo H reflexivo³ e com o teoremas 3.3.1 e 3.3.2, temos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de H^* admitindo, para $f(x) = \langle x, \tilde{f} \rangle \in H^*$ arbitrário, a seguinte expansão:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n) f_n(x) \\ \langle x, \tilde{f} \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, \tilde{f} \rangle \langle x, \tilde{f}_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, \overline{\langle x_n, \tilde{f} \rangle} \tilde{f}_n \rangle \\ &\text{pela continuidade do produto interno:} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, \langle \tilde{f}, x_n \rangle \tilde{f}_n \rangle = \langle x, \sum_{n=1}^{\infty} \langle \tilde{f}, x_n \rangle \tilde{f}_n \rangle. \end{aligned}$$

Em seguida,

$$\begin{aligned} \langle x, \tilde{f} \rangle - \langle x, \sum_{n=1}^{\infty} \langle \tilde{f}, x_n \rangle \tilde{f}_n \rangle &= 0 \\ \langle x, \tilde{f} - \sum_{n=1}^{\infty} \langle \tilde{f}, x_n \rangle \tilde{f}_n \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Como $x \in X$ é arbitrário, basta tomar $x = \tilde{f} - \sum_{n=1}^{\infty} \langle \tilde{f}, x_n \rangle \tilde{f}_n$, então:

$$\langle \tilde{f} - \sum_{n=1}^{\infty} \langle \tilde{f}, x_n \rangle \tilde{f}_n, \tilde{f} - \sum_{n=1}^{\infty} \langle \tilde{f}, x_n \rangle \tilde{f}_n \rangle = 0 \iff \tilde{f} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \tilde{f}, x_n \rangle \tilde{f}_n.$$

Segue de que $(\tilde{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base que a representação de \tilde{f} é única. E como podemos definir $f(x) = \langle x, y \rangle$ para todo $y \in X$, temos a seguinte conclusão:

³Todo espaço de Hilbert é reflexivo (veja Kreyszig (1978), p.242).

Para espaços de Hilbert H , a sequência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bi-ortogonal a uma base de Schauder $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de Schauder de H , admitindo a seguinte expansão:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle y_n.$$

Capítulo 4

Estabilidade e bases de Riesz

4.1 Bases de Riesz

No estudo de bases de Schauder, a identificação de bases é uma questão fundamental. No caso de identificar novas bases a partir de uma base $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X já encontrada, para X um espaço de Banach, uma forma imediata é a de transformar o espaço por um isomorfismo $X \mapsto X$ e consigo a base. Em particular, se $T : X \rightarrow X$ é um operador linear contínuo e com inversa contínua, T define, de fato, uma nova base $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, onde

$$y_n = Tx_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Uma vez que, para cada $x \in X$, existe $T^{-1}x \in X$ que pode ser representado como

$$T^{-1}x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n.$$

Como a expansão de $T^{-1}x$ é uma série convergente em X e T contínua,

$$x = T \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n T x_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n.$$

A unicidade da representação de x pela sequência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, por fim, é imediata, uma vez que T é injetor e a expansão para $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ única.

Apesar de serem, geralmente, bases distintas, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ estão intrinsecamente relacionados pelo isomorfismo T . Para qualificar essa relação definimos uma noção de equivalência:

Definição 4.1.1. Sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ duas bases de Schauder de um espaço de Banach X . Dizemos que são bases equivalentes se:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \text{ é convergente} \iff \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n \text{ é convergente.}$$

Para qualquer sequência $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de escalares.

Veremos a seguir que essa noção é completamente reduzida à existência de um isomorfismo $T : X \rightarrow X$ linear limitado e com inversa T^{-1} limitada, que relaciona $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Para um operador T nessas condições, onde $T, T^{-1} \in B(X, X)$, dizemos que T é *invertível em $B(X, X)$* .

Teorema 4.1.1. *Duas bases de Schauder $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são equivalentes se, e somente se, existir um isomorfismo $T : X \rightarrow X$ invertível em $B(X, X)$, tal que $Tx_n = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são bases de Schauder equivalentes. Podemos então definir um operador $T : X \rightarrow X$ que associa a cada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n = x \in X$ o ponto $\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n = Tx \in X$. De imediato,

$$Tx_n = y_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Uma vez que ambas as séries convergem, representam pontos x e Tx em X . Como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são bases, essas representações são únicas e portanto, T é injetor. Além disso, para qualquer $y = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n \in X$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ converge em X então existe $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ tal que $y = Tx$. Isto é, T é sobrejetor e com isso, invertível. Note também que:

$$T(ax) = T\left(a \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n\right) = T\left(\sum_{n=1}^{\infty} ac_n x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} ac_n y_n = a \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n = aTx,$$

e, para $w = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n \in X$,

$$T(x+w) = T\left(\sum_{n=1}^{\infty} (c_n + b_n) x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + b_n) y_n = Tx + Tw,$$

pelo teorema 2.1.1. Assim, temos que T é linear. Para provar que T é contínuo, consideramos as somas parciais $S_n x = \sum_{i=1}^n c_i x_i$ e $S_n y = \sum_{i=1}^n c_i y_i$, então $T(S_n x) = S_n y$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n y$ é convergente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(S_n x) = Tx, \text{ para todo } x \in X.$$

Como, para qualquer $x \in X$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T(S_n x)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_n T x\|$ é limitado (pelo corolário 3.2.1.2), pelo teorema 3.1.8, T é limitado. Por fim, pelo teorema da Aplicação Aberta, T^{-1} é também limitado.

(\Leftarrow) Suponha que existe um isomorfismo $T : X \rightarrow X$ invertível em $B(X, X)$, tal que $Tx_n = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ convergir, como T é contínua, $T(\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n T x_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n$ convergirá. Por outro lado, T^{-1} também é contínua e $T^{-1}y_n = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se $\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n$ convergir, $T^{-1}(\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ convergirá. \square

Observação. Note que é suficiente que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seja uma base de Schauder e que haja um isomorfismo T invertível em $B(X, X)$, para que $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seja uma base de Schauder equivalente a $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Como provamos anteriormente, a sequência resultante de um isomorfismo invertível em $B(X, X)$ aplicado aos termos de uma base de Schauder define uma base de Schauder em X .

Estabelecida a relação entre bases equivalentes e isomorfismos invertíveis em $B(X, X)$, será uma tarefa recorrente provar que operadores serão de fato invertíveis. Para este fim, incluímos a seguir teoremas que retratam o comportamento de operadores invertíveis.

Teorema 4.1.2. *Um operador linear $T : X \rightarrow Y$ entre espaços vetoriais não-vazios, é injetor se, e somente se,*

$$Tx = 0 \implies x = 0.$$

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que T seja linear e injetor. Para $x \in X$ qualquer, $T0 = T(0x) = 0Tx = 0$. Como é injetor,

$$Tx = 0 \implies x = 0.$$

(\Leftarrow) Seja T linear e satisfazendo $Tx = 0 \implies x = 0$. Suponha que T não é injetor, então existem $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ tais que $Tx_1 = Tx_2$. Então $T(x_1 - x_2) = 0$ onde $x_1 - x_2 \neq 0$. Um absurdo. Então T é injetor. \square

Teorema 4.1.3. *Sejam $(X, \|\cdot\|_x)$, $(Y, \|\cdot\|_y)$, $(Z, \|\cdot\|_z)$ espaços de Banach e $T : X \rightarrow Y$ e $S : Y \rightarrow Z$ operadores lineares.*

1. ST é linear.
2. Se T e S são limitados, ST é limitado e $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$.

3. Se T e S são invertíveis, S^{-1} e T^{-1} são lineares, ST é invertível e $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.
4. Se T e S são invertíveis com inversa limitada, ST é invertível e tem inversa limitada.

Demonstração. 1. Sejam $x_1, x_2 \in X$ e $a, b \in \mathbb{F}$,

$$ST(ax_1 + bx_2) = S(aTx_1 + bTx_2) = aSTx_1 + bSTx_2.$$

2. Se T e S são limitados:

$$\|ST\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|S(Tx)\|_z \leq \|S\| \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|Tx\|_y = \|S\| \|T\|.$$

3. Suponha que T e S são invertíveis. Para quaisquer $y_1, y_2 \in Y$, existem $x_1, x_2 \in X$ tais que $Tx_1 = y_1$ e $Tx_2 = y_2$. Para $a, b \in \mathbb{F}$ arbitrários:

$$\begin{aligned} T^{-1}(ay_1 + by_2) &= T^{-1}(aTx_1 + bTx_2) = T^{-1}T(ax_1) + T^{-1}T(bx_2) \\ &= ax_1 + bx_2 = aT^{-1}y_1 + bT^{-1}y_2 \end{aligned}$$

Isto é, T^{-1} é linear, e analogamente S^{-1} também será. Como T é sobrejetor, a imagem de T é Y . Com S , com domínio Y , sobrejetor, a imagem de ST é Z , portanto ST é sobrejetor. Além disso, seja $z \in Z$ qualquer, como S é injetor, existe um único $y \in Y$ tal que $Sy = z$. Como T é injetor, existe um único $x \in X$ tal que $S(Tx) = STx = z$, ST é injetor. Agora, veja que para todo $x \in X$,

$$STT^{-1}S^{-1}x = S(TT^{-1}(S^{-1}x)) = S(S^{-1}x) = x,$$

e,

$$T^{-1}S^{-1}STx = T^{-1}(S^{-1}S(Tx)) = T^{-1}(Tx) = x.$$

Assim, $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.

4. Se T e S são invertíveis, pelos itens 1, 2 e 3, ST é linear, limitado e invertível. Além disso, como T^{-1} e S^{-1} também são lineares e limitados, $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$ é linear e limitado. □

Com estes resultado, retomamos o estudo de bases equivalentes.

Teorema 4.1.4. *Se H é um espaço de Hilbert, bases de Schauder $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ equivalentes tem sequências bi-ortogonais equivalentes.*

Demonstração. Sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bases de Schauder de H equivalentes e $(\tilde{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\tilde{g}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suas respectivas sequências bi-ortogonais. Como H é um espaço de Hilbert, $(\tilde{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\tilde{g}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são também bases de Schauder de H . Além disso, existe um operador T linear limitado e invertível em $B(H, H)$ tal que $Tx_n = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Podemos então considerar $T^* : H \rightarrow H$ o operador *Hilbert-adjunto*¹ de T , isto é, T^* tal que

$$\langle x, T^*y \rangle = \langle Tx, y \rangle, \quad y \in H$$

Agora, tome $x, y, z \in H$ e $a, b \in \mathbb{F}$ arbitrários.

$$\begin{aligned} \langle x, T^*(ay + bz) \rangle &= \langle Tx, ay + bz \rangle \\ &= \bar{a}\langle Tx, y \rangle + \bar{b}\langle Tx, z \rangle \\ &= \bar{a}\langle x, T^*y \rangle + \bar{b}\langle x, T^*z \rangle \\ &= \langle x, aT^*y + bT^*z \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, $T^*(ay + bz) = aT^*y + bT^*z$, T^* é linear. Em seguida, considere $y \in H$ qualquer.

$$\begin{aligned} \|T^*y\|^2 &= \langle T^*y, T^*y \rangle = \langle TT^*y, y \rangle \\ &\leq \|TT^*y\| \|y\| \leq \|T\| \|T^*y\| \|y\| \\ \therefore \|T^*y\| &\leq \|T\| \|y\|. \end{aligned}$$

Uma vez que T é limitado, segue que T^* também será. Agora, veremos que $T^*\tilde{g}_n = \tilde{f}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para $m \in \mathbb{N}$ fixo e $n \in \mathbb{N}$ qualquer:

$$\langle x_n, T^*\tilde{g}_m \rangle = \langle Tx_n, \tilde{g}_m \rangle = \langle y_n, \tilde{g}_m \rangle = \delta_{nm}.$$

Como $(\tilde{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é bi-ortogonal a x_n ,

$$\langle x_n, \tilde{f}_m \rangle - \langle x_n, T^*\tilde{g}_n \rangle = \delta_{nm} - \delta_{nm} = 0.$$

Já que n é arbitrário, $\tilde{f}_m - T^*\tilde{g}_m$ é ortogonal a toda a base $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de Schauder, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é completa em H . Pelo teorema

¹Para a existência de T^* , veja Kreyszig (1978) p.196.

3.1.6, o único vetor ortogonal a todos os vetores da base é o vetor nulo. Assim, $\tilde{f}_m - T^*\tilde{g}_m = 0$, ou seja, $T^*\tilde{g}_m = \tilde{f}_m$. Em seguida, tome $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \tilde{f}_n \in H$ qualquer. Existe $w = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \tilde{g}_n \in H$ tal que $T^*w = x$. Como $(\tilde{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base, T^* é sobrejetor e, pela unicidade da representação das bases de Schauder, T^* é injetor. Por fim, pelo teorema da Aplicação Aberta, temos que T^* é invertível em $B(X, X)$. Ou seja, $(\tilde{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\tilde{g}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são equivalentes. \square

Em espaços de Hilbert separáveis, bases ortonormais são particularmente úteis. Estudaremos a seguir a classe de bases equivalentes a bases ortonormais.

Definição 4.1.2 (Bases de Riesz). Uma base de Schauder $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de um espaço de Hilbert H é dita uma *base de Riesz* se for equivalente a uma base ortonormal $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Por $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ser uma equivalente a uma base ortonormal, existe um operador invertível em $B(H, H)$ que transforma $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Consequentemente, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 1 \leq \|e_n\| &= \|T^{-1}(Te_n)\| \leq \|T^{-1}\| \overbrace{\|Te_n\|}^{\|f_n\|} \leq \|T^{-1}\| \|T\|. \\ \therefore \frac{1}{\|T^{-1}\|} &\leq \|f_n\| \leq \|T\|. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Note que $\|T^{-1}\| = 0 \iff T^{-1} = 0$, e consequentemente $e_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, um absurdo. De fato, $\|T^{-1}\| > 0$.

Teorema 4.1.5. Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de Riesz, $(f_n/\|f_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ também será uma base de Riesz.

Demonstração. Seja $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a base ortonormal a qual $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é equivalente e T invertível em $B(H, H)$ tal que $f_n = Te_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tome $S : H \rightarrow H$ um operador tal que:

$$Sx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle x, e_n \rangle}{\|f_n\|} e_n.$$

Mostraremos agora que S é de fato bem definido, isto é, que para todo $x \in H$, Sx converge em H : Pelo teorema de Riesz-Fischer,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \text{ converge em } H \iff \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty.$$

Segue então que $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 < +\infty$. Agora, seja $x \in H$ qualquer, temos que Sx converge em H se:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\langle x, e_n \rangle}{\|f_n\|} \right|^2 < +\infty.$$

Por (4.1),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\langle x, e_n \rangle}{\|f_n\|} \right|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|T^{-1}\|^2 |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|T^{-1}\|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2.$$

Finalmente, como $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 < +\infty$, Sx converge. De forma análoga, $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \|f_n\| e_n$ também converge.

Dado que S está bem definido, mostraremos que é linear, contínuo e invertível em $B(H, H)$. A linearidade de S é uma consequência imediata da linearidade da primeira entrada do produto interno e da convergência de Sx e Sy . Com $x, y \in H$ e $a, b \in \mathbb{F}$,

$$\begin{aligned} S(ax + by) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle ax + by, e_n \rangle}{\|f_n\|} e_n \\ &= a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle x, e_n \rangle}{\|f_n\|} e_n + b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle y, e_n \rangle}{\|f_n\|} e_n \\ &= aSx + bSy. \end{aligned}$$

A continuidade de S segue da desigualdade (4.1),

$$\begin{aligned} \sup_{\|x\|=1} \|Sx\| &= \sup_{\|x\|=1} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle x, e_n \rangle}{\|f_n\|} e_n \right\| \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \|T^{-1}\| \langle x, e_n \rangle e_n \right\| \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} \|T^{-1}\| \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \right\| \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} \|T^{-1}\| \|x\| \\ &= \|T^{-1}\| < +\infty. \end{aligned}$$

Para mostrar que S é invertível, veja que $Sx = 0 \implies \langle x, e_n \rangle = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que implica que $x = 0$. Pelo teorema 4.1.2 S é injetor. Em seguida, tome $y \in H$ qualquer,

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, e_n \rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \|f_n\| \frac{e_n}{\|f_n\|} = S \left(\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \|f_n\| e_n \right),$$

Por (4.1), $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, e_n \rangle \|f_n\| e_n$ converge. Ou seja, S é sobrejetor. Pelo teorema da Aplicação Aberta, S é invertível em $B(H, H)$. Agora, basta considerar o operador TS :

$$TSe_n = T \left(\frac{e_n}{\|f_n\|} \right) = \frac{f_n}{\|f_n\|}.$$

Como a composição de T e S , TS é também linear, contínuo e invertível em $B(X, X)$ (teorema 4.1.3). Portanto $(\frac{f_n}{\|f_n\|})_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de Riesz. \square

Enquanto estudamos a hipótese de equivalência entre bases, uma necessidade recorrente é a de confirmarmos a limitação de operadores lineares $X \mapsto X$ em questão. Ou, de forma mais geral, entre os espaços gerados por seqüências de vetores $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X , seqüências que podem ainda não ser reconhecidas como bases.

Porém a análise desses operadores nos interessa mais como uma forma de qualificar a transformação entre dois espaços do que como um teste do maior valor que a norma atinge para qualquer $\|x\| = 1$. Exploramos então uma forma de confirmar se um operador é limitado, analisando o gráfico $\mathcal{G}(T)$ que ele gera. Onde $\mathcal{G}(T)$ é definido por

$$\mathcal{G}(T) = \{(x, y) : x \in E, y = Tx\},$$

para X e Y espaços vetoriais, $E \subseteq X$ e $T : E \rightarrow Y$. Para isso, primeiro definiremos um espaço normado para o conter:

Definição 4.1.3. Sejam X e Y espaços normados, definimos como o espaço normado $X \times Y$ o espaço vetorial respeitando

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2), & x_1, x_2 \in X, y_1, y_2 \in Y \\ a(x, y) &= (ax, ay), & a \in \mathbb{F}, x \in X, y \in Y, \end{aligned}$$

e munido da norma

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|.$$

Definição 4.1.4 (Operador linear fechado). Se X e Y são espaços normados, $E \subseteq X$ e $T : E \rightarrow Y$ é um operador linear, chamaremos T de um *operador linear fechado* se seu gráfico $\mathcal{G}(T)$ for fechado no espaço normado $X \times Y$.

Com essa linguagem, introduzimos o seguinte teorema, cuja demonstração omitimos:

Teorema 4.1.6 (Teorema do gráfico fechado). *Sejam X e Y espaços de Banach, $E \subseteq X$ e $T : E \rightarrow Y$ um operador linear fechado. Se E é fechado em X , T é um operador linear limitado.*

A seguir discutimos resultados importantes que caracterizam bases de Riesz, mas que não serão usados diretamente no nosso estudo remanescente de bases de Schauder.

Teorema 4.1.7. *Seja H um espaço de Hilbert complexo e separável, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de Riesz de H .
2. Existe um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ em H , equivalente a $\langle \cdot, \cdot \rangle$, com o qual $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de Schauder ortonormal de H .
3. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência completa em H e existem constantes $A, B > 0$ tais que, para $n \in \mathbb{N}$ e escalares c_1, \dots, c_n arbitrários:

$$A \sum_{i=1}^n |c_i|^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^n c_i f_i \right\|^2 \leq B \sum_{i=1}^n |c_i|^2.$$

4. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência completa em H cuja matriz de Gram, isto é, a matriz G com entradas

$$G_{ij} = \langle f_i, f_j \rangle, \quad i, j \in \mathbb{N},$$

gera um operador $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ invertível em $B(\ell^2, \ell^2)$, onde

$$T((b_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i \langle f_i, f_n \rangle \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

5. A sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é completa em H e tem uma sequência bi-ortogonal completa $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que, para todo $f \in H$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n \rangle|^2 < \infty \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, g_n \rangle|^2 < +\infty.$$

Demonstração. (1) \Rightarrow (2): Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma base de Riesz de H . Existe uma base de Schauder ortonormal $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e um operador T invertível em $B(H, H)$ tal que:

$$Tf_n = e_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Com T definimos um novo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_2 : H \rightarrow \mathbb{F}$:

$$\langle x, y \rangle_2 = \langle Tx, Ty \rangle.$$

De fato $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ verifica os requisitos de um produto interno. É fácil ver que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é ortonormal para $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$:

$$\langle f_n, f_m \rangle_2 = \langle e_n, e_m \rangle = \delta_{nm}$$

para $n, m \in \mathbb{N}$ e δ_{nm} o delta de Kronecker. Nos resta agora verificar que $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ é equivalente a $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Para isso, tome por $\| \cdot \|_2$ a norma gerada pelo novo produto interno.

$$\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle_2 = \langle Tf, Tf \rangle = \|Tf\|^2$$

para qualquer $f \in H$. Portanto,

$$\|f\|_2 = \|Tf\| \leq \|T\| \cdot \|f\|,$$

e,

$$\|f\| = \|T^{-1}Tf\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|Tf\| = \|T^{-1}\| \cdot \|f\|_2.$$

Por fim,

$$\frac{\|f\|}{\|T^{-1}\|} \leq \|f\|_2 \leq \|T\| \|f\|.$$

Assim, temos que as normas são equivalentes e consequentemente os produto internos também.

(2) \Rightarrow (3): Supondo que existe $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$, equivalente a $\langle \cdot, \cdot \rangle$, tal que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é ortonormal, temos:

$$m\|f\| \leq \|f\|_2 \leq M\|f\|$$

para $m, M \in \mathbb{R}$ e $\|\cdot\|_2$ a norma gerada por $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$. Daí,

$$\frac{1}{M^2} \|f\|_2^2 \leq \|f\|^2 \quad \text{e} \quad \|f\|^2 \leq \frac{1}{m^2} \|f\|_2^2.$$

Agora, tome $f = \sum_{i=1}^n c_i f_i$ qualquer. Como $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base ortonormal em $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$, pela identidade de Parseval:

$$\|f\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |c_i|^2.$$

Finalmente, tome $A = \frac{1}{M^2}$ e $B = \frac{1}{m^2}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{M^2} \sum_{i=1}^n |c_i|^2 &\leq \left\| \sum_{i=1}^n c_i f_i \right\|^2 \leq \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^n |c_i|^2 \\ A \sum_{i=1}^n |c_i|^2 &\leq \left\| \sum_{i=1}^n c_i f_i \right\|^2 \leq B \sum_{i=1}^n |c_i|^2. \end{aligned}$$

Agora, seja $x \in H$ e $\varepsilon > 0$ quaisquer. Uma vez que é uma base de Schauder de $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é completa em $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$, então existe $\sum_{i=1}^n b_i f_i$, para $n \in \mathbb{N}$, tal que:

$$\left\| x - \sum_{i=1}^n b_i f_i \right\|_2 < m\varepsilon.$$

Por hipótese,

$$\begin{aligned} m \left\| x - \sum_{i=1}^n b_i f_i \right\| &< \left\| x - \sum_{i=1}^n b_i f_i \right\|_2 < m\varepsilon \\ \left\| x - \sum_{i=1}^n b_i f_i \right\| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Como as escolhas de x e ε são arbitrárias, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é completa em $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

(3) \Rightarrow (1): Suponha que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência completa em H e que, existem $A, B > 0$ tais que, para $n \in \mathbb{N}$ e escalares c_1, \dots, c_n arbitrários,

$$A \sum_{i=1}^n |c_i|^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^n c_i f_i \right\|^2 \leq B \sum_{i=1}^n |c_i|^2.$$

Primeiro, veja que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de vetores não-nulos: Suponha que existe $f_m = 0$. Tomando $c_1, \dots, c_{m-1} = 0$ e $c_m = 1$ teríamos, por hipótese, $A \cdot |1|^2 \leq \|0\|^2 \implies A \leq 0$, um absurdo.

Agora, tome $M = \sqrt{\frac{B}{A}}$. Sejam $n, m \in \mathbb{N}$, $n \leq m$ e c_1, \dots, c_m escalares quaisquer:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n c_i f_i \right\|^2 &\leq B \sum_{i=1}^n |c_i|^2 \\ &\leq B \sum_{i=1}^m |c_i|^2 = M^2 A \sum_{i=1}^m |c_i|^2 \\ &\leq M^2 \left\| \sum_{i=1}^m c_i f_i \right\|^2. \end{aligned}$$

Daí,

$$\left\| \sum_{i=1}^n c_i f_i \right\| \leq M \left\| \sum_{i=1}^m c_i f_i \right\|.$$

Com ambos esses fatos estabelecidos, o teorema 3.2.2 garante que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ será uma base de Schauder. Nos resta confirmar que é de fato, uma base de Riesz. Como H admite uma base de Schauder, é um espaço de Hilbert separável, então, pelo teorema 2.2.4 existe uma base de Schauder $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de H ortonormal. Agora, pelo teorema de Riesz-Fischer, temos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \text{ converge em } H \iff \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty.$$

Seja $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de escalares qualquer, mostraremos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n \text{ converge em } H.$$

Se a seqüência $(\sum_{i=1}^n c_i f_i)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, como

$$\sum_{i=1}^n |c_i|^2 \leq \frac{1}{A} \left\| \sum_{i=1}^n c_i f_i \right\|^2$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em ℓ^2 . Por outro lado, se $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em ℓ^2 , temos

$$\left\| \sum_{i=1}^n c_i f_i \right\| \leq \sqrt{B \sum_{i=1}^n |c_i|^2}$$

para $n \in \mathbb{N}$ ainda arbitrário. Ou seja, a sequência $(\sum_{i=1}^n c_i f_i)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Assim, temos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n \text{ converge em } H \iff \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \text{ converge em } H.$$

As bases $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são equivalentes, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de Riesz.

(1) \Rightarrow (4): Suponha que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de Riesz de H . Então existe $T : H \rightarrow H$ inversível em $B(H, H)$ tal que $T e_n = f_n$. Vimos na demonstração do teorema 4.1.4 que existirá $T^* : H \rightarrow H$, o operador Hilbert-adjunto de T , e este também será linear e limitado. Como T é invertível em $B(H, H)$, existe $(T^{-1})^* \in B(H, H)$. Agora, veja que, para quaisquer $x, y \in H$

$$\langle x, y \rangle = \langle T^{-1} T x, y \rangle = \langle x, T^* (T^{-1})^* y \rangle.$$

Analogamente,

$$\langle x, y \rangle = \langle T T^{-1} x, y \rangle = \langle x, (T^{-1})^* T^* y \rangle.$$

Portanto $T^* (T^{-1})^* y = (T^{-1})^* T^* y = y$ para todo $y \in H$. Ou seja, T^* é invertível e seu operador inverso, $(T^{-1})^*$, é linear e limitado. T^* também é invertível em $B(H, H)$.

Consequentemente, sua composição $T^* T$ também será invertível em $B(H, H)$ (teorema 4.1.3). Agora veja que, para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}$:

$$\langle T^* T e_i, e_j \rangle = \langle T e_i, T e_j \rangle = \langle f_i, f_j \rangle.$$

Então, seja $\sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i \in H$ qualquer,

$$\begin{aligned} T^* T \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i \right) &= \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle T^* T \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i \right), e_j \right\rangle e_j \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i \langle T^* T e_i, e_j \rangle \right) e_j \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i \langle f_i, f_j \rangle \right) e_j. \end{aligned}$$

Pelo teorema de Riesz-Fischer, existe um isomorfismo limitado e com inversa limitada S entre ℓ^2 e H tal que $S((b_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e_n$. Agora, se considerarmos $S^{-1}T^*TS$, teremos um operador $\ell^2 \mapsto \ell^2$ tal que:

$$(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i \langle f_i, f_n \rangle \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Como $S^{-1}T^*TS$ é a composição de operadores invertíveis, lineares, limitados e com inversa limitada, é em si um operador invertível em $B(\ell^2, \ell^2)$.

(4) \Rightarrow (3): Suponha que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é completa em H e que existe um operador $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ limitado e invertível em $B(\ell^2, \ell^2)$ tal que:

$$T((b_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i \langle f_i, f_n \rangle \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Como H é um espaço de Hilbert separável, ele admite uma base ortonormal $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Pelo teorema de Riesz-Fischer existe $S : H \rightarrow \ell^2$ linear, limitado com inversa limitada tal que $Sx = (\langle x, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$. Podemos então definir um operador $K = S^{-1}TS$ ainda linear, limitado e invertível em $B(H, H)$ (teorema 4.1.3) onde:

$$K \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i \langle f_i, f_n \rangle \right) e_n.$$

Então, para qualquer $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \in H$, temos

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n \right\|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i, \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n \right\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{c_n} \sum_{i=1}^{\infty} c_i \langle f_i, f_n \rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{c_n} \sum_{i=1}^{\infty} \langle f_i, f_n \rangle c_i \langle e_n, e_n \rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} c_i \langle f_i, f_n \rangle e_n, c_n e_n \right\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} c_i \langle f_i, f_n \rangle e_n, \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} c_i \langle f_i, f_n \rangle e_n, \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j \right\rangle \\
&= \left\langle K \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \right), \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \right\rangle.
\end{aligned}$$

Daí, K é um operador positivo. Isto é, que $K : H \rightarrow H$ é tal que, para qualquer $x \in H$,

$$\langle Kx, x \rangle \geq 0.$$

Uma vez que $\langle Kx, x \rangle$ é real,

$$\langle Kx, x \rangle = \overline{\langle K^*x, x \rangle} = \langle K^*x, x \rangle.$$

Então, seja $D = K - K^*$, $\langle Dx, x \rangle = 0$ para todo $x \in H$. Tome agora $x, y \in H$ e $a \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
0 &= \langle D(ax + y), ax + y \rangle \\
&= |a|^2 \underbrace{\langle Dx, x \rangle}_0 + a \langle Dx, y \rangle + \bar{a} \langle Dy, x \rangle + \underbrace{\langle Dy, y \rangle}_0 \\
&= a \langle Dx, y \rangle + \bar{a} \langle Dy, x \rangle.
\end{aligned}$$

Como a é arbitrário, podemos tomar a $a = 1$, $\langle Dx, y \rangle + \langle Dy, x \rangle = 0$, para $a = i$, $i \langle Dx, y \rangle - i \langle Dy, x \rangle = \langle Dx, y \rangle - \langle Dy, x \rangle = 0$. Portanto, $\langle Dx, y \rangle = 0$

para quaisquer $x, y \in H$ e conseqüentemente $D = K - K^* = 0$. Isto é, $K = K^*$, dizemos então que K é um operador *auto-adjunto*.

Como K é positivo, existe $P : H \rightarrow H$, também positivo e auto-adjunto, tal que $K = PP$ (Riesz and Sz.-Nagy (1955), p.265). Chamamos P de *raiz quadrada de K* . Uma vez que K é invertível, como $PP = K$, $\text{Im}(P) = \text{Im}(K) = H$, P é sobrejetor. E,

$$Px = 0 \implies PPx = 0 \implies x = 0.$$

Pelo teorema 4.1.2, P é invertível. Veja também que, como $K = PP$,

$$P^{-1}P^{-1}Kx = x \quad \text{e} \quad KP^{-1}P^{-1}x = x,$$

para $x \in H$ qualquer. Ou seja, $K^{-1} = P^{-1}P^{-1}$. Como P é auto-adjunto, para todo $x \in H$ com $\|x\| = 1$

$$\|Px\|^2 = \langle Px, Px \rangle = \langle PPx, x \rangle = \langle Kx, x \rangle \leq \|K\|.$$

Portanto, P é limitado. Assim, como K e K^{-1} são operadores limitados, ambos P e P^{-1} são limitados. Com P auto-adjunto, para qualquer $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n \in H$,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n \right\|^2 &= \left\langle PP \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \right), \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j \right\rangle \\ &= \left\langle P \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \right), P \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \right) \right\rangle \\ &= \left\| P \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \right) \right\|^2. \end{aligned}$$

Como P é invertível, podemos tomar, para qualquer $\sum_{i=1}^n c_i f_i \in H$, $P^{-1}(\sum_{i=1}^n c_i f_i) \in H$ de tal forma que:

$$\left\| P^{-1} \left(\sum_{i=1}^n c_i f_i \right) \right\|^2 = \left\| PP^{-1} \left(\sum_{i=1}^n c_i e_i \right) \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n c_i e_i \right\|^2.$$

Teremos então:

$$\left\| \sum_{i=1}^n c_i f_i \right\|^2 \leq \|P\|^2 \left\| \sum_{i=1}^n c_i e_i \right\|^2,$$

e

$$\frac{1}{\|P^{-1}\|^2} \left\| \sum_{i=1}^n c_i e_i \right\|^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^n c_i f_i \right\|^2.$$

Tome $A = \frac{1}{\|P^{-1}\|^2}$ e $B = \|P\|^2$ (note que $\|P^{-1}\| > 0$ uma vez que $K \neq 0$). Finalmente, com a identidade de Parseval temos:

$$A \sum_{i=1}^n |c_i|^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^n c_i f_i \right\|^2 \leq B \sum_{i=1}^n |c_i|^2$$

para uma escolha arbitrária de $n \in \mathbb{N}$ e $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$.

(1) \Rightarrow (5): Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma base de Riesz de H , $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a base ortonormal a qual é equivalente e $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência bi-ortogonal a $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Como H é um espaço de Hilbert, $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de Schauder, e portanto é completa em H . Pelo teorema 4.1.4, $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é equivalente à sequência bi-ortogonal a $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Porém, veja que, por definição,

$$\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{nm}.$$

Assim, $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é equivalente a $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e conseqüentemente uma base de Riesz. Pelo teorema de Riesz-Fischer, vimos que, para $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de escalares qualquer,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \text{ converge em } H \iff \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty.$$

Agora, seja $f \in H$ qualquer, como bases de Schauder bi-ortogonais, temos as seguinte expansões:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, g_n \rangle f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle g_n.$$

Como são bases equivalentes a $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, g_n \rangle|^2 < +\infty \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n \rangle|^2 < +\infty.$$

(5) \Rightarrow (1): Suponha que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência completa em H e que dispõe de uma sequência bi-ortogonal também completa $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n \rangle|^2 < \infty \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, g_n \rangle|^2 < +\infty,$$

para $f \in H$ qualquer. Como $(\langle f, f_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ para todo $f \in H$, podemos definir um operador $T : H \rightarrow \ell^2$ tal que $Tf = (\langle f, f_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$. Da linearidade do produto interno temos que T é linear. Agora voltamos nossa atenção ao gráfico de T , $\mathcal{G}(T)$. Suponha que $(x_n, Tx_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{G}(T)$ é uma sequência de Cauchy, então, para $\varepsilon > 0$ qualquer existe n_0 tal que, dados $n, m > n_0$,

$$\|x_n - x_m\| + \|Tx_n - Tx_m\| \leq \varepsilon.$$

Assim, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ serão Cauchy em H e Y respectivamente. Como ambos esses espaços são completos, existem $x \in H$ e $y \in Y$ tais que $x_n \rightarrow x$ e $Tx_n \rightarrow y$. Para concluirmos que $\mathcal{G}(T)$ é fechado, queremos mostrar que $(x_n, Tx_n) \rightarrow (x, Tx)$, isto é, nos resta provar que $y = Tx$. Para isso, veja que, como $Tx_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} y$ em ℓ^2 , para qualquer $\varepsilon > 0$ existe m_0 tal que se $m > m_0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|(Tx_m)_n - y_n\|^2 < \varepsilon$$

onde $(Tx_m)_n$ e y_n são os n -ésimos termos das sequências Tx_m e y . Ou seja, y é tal que $y_n = \lim_{m \rightarrow \infty} (Tx_m)_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como o produto interno é contínuo na primeira entrada, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ fixo,

$$y_n = \lim_{m \rightarrow \infty} (Tx_m)_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle x_m, f_n \rangle = \langle \lim_{m \rightarrow \infty} x_m, f_n \rangle = \langle x, f_n \rangle.$$

Assim, temos que $y = Tx$ e $(x_n, Tx_n) \xrightarrow{H \times Y} (x, Tx) \in \mathcal{G}(T)$. Como a escolha de sequência em $\mathcal{G}(T)$ foi arbitrária, temos que o gráfico de T é fechado. Com domínio H fechado, pelo teorema do Gráfico Fechado, temos que T é limitado. Isto é, existe $C > 0$ tal que:

$$\|Tf\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n \rangle|^2 \leq C^2 \|f\|^2.$$

Analogamente, $S : H \rightarrow \ell^2$ com $Sf = (\langle f, g_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ também será linear e limitado. Então podemos identificar também $D > 0$ tal que:

$$\|Sf\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, g_n \rangle|^2 \leq D^2 \|f\|^2.$$

Uma vez que, por hipótese, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é completa em H , H é separável e portanto, admite uma base ortonormal $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (teorema 2.2.4). Agora,

definimos operadores F e G nos espaços gerados por $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ respectivamente, onde

$$F \left(\sum_{i=1}^n c_i f_i \right) = \sum_{i=1}^n c_i e_i \quad \text{e} \quad G \left(\sum_{i=1}^n c_i g_i \right) = \sum_{i=1}^n c_i e_i.$$

F e G são assim, operadores lineares. Veja também que:

$$\left\| S \left(\sum_{i=1}^n c_i f_i \right) \right\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \left\langle \sum_{i=1}^n c_i f_i, g_j \right\rangle \right|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^n c_i \langle f_i, g_j \rangle \right|^2,$$

como seqüências bi-ortogonais, $\langle f_i, g_j \rangle = 0$ se $i \neq j$. Portanto,

$$\begin{aligned} \left\| S \left(\sum_{i=1}^n c_i f_i \right) \right\|^2 &= \sum_{j=1}^n |c_j \langle f_j, g_j \rangle|^2 = \sum_{j=1}^n |c_j|^2 \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n c_i e_i \right\|^2 = \left\| F \left(\sum_{i=1}^n c_i f_i \right) \right\|^2. \end{aligned}$$

Pelas desigualdades estabelecidas anteriormente, temos:

$$\left\| F \left(\sum_{i=1}^n c_i f_i \right) \right\| \leq D \left\| \sum_{i=1}^n c_i f_i \right\|. \quad (4.2)$$

Analogamente,

$$\left\| G \left(\sum_{i=1}^n c_i g_i \right) \right\| \leq C \left\| \sum_{i=1}^n c_i g_i \right\|. \quad (4.3)$$

Agora, estenderemos F e G para todo o espaço H . Primeiro, como uma seqüência completa, para qualquer $x \in H$ existe uma seqüência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{span}(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $u_n \rightarrow x$ em H . Daí, para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$

$$\|F u_n - F u_m\| \leq D \|u_n - u_m\|.$$

Assim, como $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é Cauchy, $(F u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ também será. Como Y é completo, existe $y \in H$ tal que $F u_n \rightarrow y$. Definimos então $F x = y$. Como a escolha de x é arbitrária, estendemos F para todo H . Fazemos o mesmo para G . Note ainda que, como as desigualdades (4.2) e (4.3) são válidas para $\text{span}(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$

e $\overline{\text{span}(g_n)_{n \in \mathbb{N}}}$ respectivamente, para qualquer ponto nos seus fechos $f \in \overline{\text{span}(f_n)_{n \in \mathbb{N}}} = H$ e $g \in \overline{\text{span}(g_n)_{n \in \mathbb{N}}} = H$ temos:

$$\|Ff\| \leq D\|f\| \quad \text{e} \quad \|Gg\| \leq C\|g\|.$$

Os operadores $F : H \rightarrow H$ e $G : H \rightarrow H$ são lineares e limitados. Agora, veja que:

$$\begin{aligned} \left\langle F \left(\sum_{i=1}^n c_i f_i \right), G \left(\sum_{j=1}^m d_j g_j \right) \right\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n c_i e_i, \sum_{j=1}^m d_j e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \sum_{j=1}^m \bar{d}_j \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \sum_{j=1}^m \bar{d}_j \langle f_i, g_j \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n c_i f_i, \sum_{j=1}^m d_j g_j \right\rangle \end{aligned}$$

Novamente, estendemos essa propriedade a todo H : Sejam $f, g \in H$ quaisquer, existem $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{span}(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{span}(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$. tais que $u_n \rightarrow f$ e $v_n \rightarrow g$. Queremos então mostrar que

$$\langle Ff, Gg \rangle = \langle f, g \rangle.$$

Primeiro veja que, se $f = 0$ a igualdade é imediata. Salvo esse caso, tome $f, g \in H$ quaisquer, mostraremos que $\langle Ff, Gg \rangle - \langle f, g \rangle = 0$.

$$\begin{aligned} \langle Ff, Gg \rangle - \langle f, g \rangle &= \langle Ff, Gg \rangle - \langle u_n, v_n \rangle - (\langle f, g \rangle - \langle u_n, v_n \rangle) \\ &= (\langle Ff, Gg - Gv_n + Gv_n \rangle - \langle Fu_n, Gv_n \rangle) \\ &\quad - (\langle f, g - v_n + v_n \rangle - \langle u_n, v_n \rangle) \\ &= (\langle Ff, G(g - v_n) \rangle + \langle F(f - u_n), Gv_n \rangle) \\ &\quad - (\langle f, g - v_n \rangle + \langle f - u_n, v_n \rangle) \\ &\leq \|Ff\| \|G\| \|g - v_n\| + \|F\| \|f - u_n\| \|G\| \|v_n\| \\ &\quad + \|f\| \|g - v_n\| + \|f - u_n\| \|v_n\| \\ &= \|g - v_n\| (\|Ff\| \|G\| + \|f\|) \\ &\quad + \|f - u_n\| (\|F\| \|G\| \|v_n\| + \|v_n\|). \end{aligned}$$

Escolheremos então $\varepsilon > 0$ tal que $\|f - u_n\| < \varepsilon$ e $\|g - v_n\| < \varepsilon$. E $\varepsilon \leq 1$, para que tenhamos:

$$\|v_n\| \leq \|g\| + \|v_n - g\| < \|g\| + 1.$$

Com isso, basta escolher, para qualquer $\delta > 0$,

$$\varepsilon = \min \left\{ 1, \frac{\delta}{2(\|Ff\|\|G\| + \|f\|)}, \frac{\delta}{2(\|F\|\|G\|(\|g\| + 1) + \|g\| + 1)} \right\}$$

Daí, com $\|f - u_n\| < \varepsilon$ e $\|g - v_n\| < \varepsilon$,

$$\begin{aligned} \langle Ff, Gg \rangle - \langle f, g \rangle &\leq \frac{\delta}{2(\|Ff\|\|G\| + \|f\|)} (\|Ff\|\|G\| + \|f\|) \\ &\quad + \frac{\delta}{2(\|g\| + 1)(\|F\|\|G\| + 1)} \|v_n\| (\|F\|\|G\| + 1) \\ &\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta. \end{aligned}$$

Como a escolha de δ é arbitrária, para quaisquer $f, g \in H$,

$$\langle Fg, Gg \rangle = \langle f, g \rangle.$$

Com o operador Hilbert-adjunto $F^* : H \rightarrow H$:

$$\langle f, F^*Gg \rangle = \langle f, g \rangle.$$

Pelo teorema da representação de Riesz, $F^*G = I$. Assim, F^* é sobrejetor, já que para qualquer $x \in H$, existe $Gx \in H$ tal que $F^*Gx = x$. Por Brezis (1999) p.30, existe $K > 0$ tal que:

$$\|x\| \leq K\|Fx\|$$

para todo $x \in H$. Por essa desigualdade, se $Fx = 0$, então $\|x\| \leq 0 \implies x = 0$. F é injetor (teorema 4.1.2). Agora, lembre-se que a imagem de F é densa em H , já que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é completo em H e $\text{span}(e_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq F(H)$. Suponha que y^* é um ponto de acumulação de $F(H)$. Então existe $(Fx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\|Fx_n - y^*\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Como $(Fx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é Cauchy, para $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe n_0 tal que para quaisquer $n, m > n_0$ teremos $\|Fx_n - Fx_m\| \leq \frac{\varepsilon}{K}$. Então $\|x_n - x_m\| \leq K\|Fx_n - Fx_m\| < \varepsilon$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ também é Cauchy. Como H é completo, existe x tal que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$. Por fim, como F é contínuo, $Fx_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Fx = y^*$. Portanto $F(H)$ é fechada e $F(H) = H$, F é sobrejetora. Pelo teorema da Aplicação Aberta, F tem inversa contínua. Por definição temos que $Ff_n = e_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de Riesz. \square

4.2 O teorema de Paley-Wiener

A partir de isomorfismos invertíveis em $B(X, X)$, analisamos uma noção de equivalência entre diferentes bases de Schauder e exploramos as implicações de tais conexões, em particular às bases de Riesz. Agora, voltamos nossa atenção ao estudo da “estabilidade” de bases de Schauder, o estudo de condições sob as quais seqüências em X podem mudar sem que estas perdam sua qualidade como bases de X .

Teorema 4.2.1 (Paley-Wiener). *Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma base de Schauder de um espaço de Banach X e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em X . Se para algum $0 \leq M < 1$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaz:*

$$\left\| \sum_{i=1}^n c_i(x_i - y_i) \right\| \leq M \left\| \sum_{i=1}^n c_i x_i \right\|$$

para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e escalares c_1, \dots, c_n , então $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de X equivalente a $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Demonstração. Definimos um operador $T : X \rightarrow X$ por

$$T \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x_n - y_n).$$

para qualquer $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \in X$. Por hipótese, temos que a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ implica a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x_n - y_n)$. Como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de Schauder de X , T está bem definido para X . Temos ainda, que, para quaisquer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n \in X$ e α, β escalares,

$$\begin{aligned} T \left(\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n \right) &= T \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) x_n \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) (x_n - y_n) \\ &= \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x_n - y_n) + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n (x_n - y_n) \\ &= \alpha T \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right) + \beta T \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n \right). \end{aligned}$$

T é um operador linear. Como, $\|Tx\| \leq M\|x\|$, T é um operador linear limitado com $\|T\| < 1$. Assim, $I - T$ também é um operador limitado, para I o operador identidade, tal que $Ix = x$ para todo $x \in X$.

Agora, consideraremos a série $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$, que chamamos de *série de Neumann*. Segue do fato de que T é um operador linear limitado, que as somas parciais da série de Neumann $\sum_{k=0}^n T^k : X \rightarrow X$ também são operadores lineares e limitados. Além disso, para qualquer $\varepsilon > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ arbitrário, e $n, m > n_0$:

$$\left\| \sum_{k=0}^m T^k - \sum_{k=0}^n T^k \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m T^k \right\| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} \|T\|^k = \frac{\|T\|^{n_0}}{1 - \|T\|}.$$

Como $1 - \|T\| > 0$, basta tomar $n_0 > \log_{\|T\|}(1 - \|T\|)\varepsilon$. Então

$$\left\| \sum_{k=0}^m T^k - \sum_{k=0}^n T^k \right\| \leq \frac{\|T\|^N}{1 - \|T\|} < \varepsilon.$$

Ou seja, para $\|T\| < 1$, a série de Neumann é Cauchy em $B(X, X)$, portanto, converge. Mostraremos agora que $\sum_{k=0}^{\infty} T^k = (I - T)^{-1}$. Para qualquer $x \in X$, como $I - T$ e $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ são operadores lineares contínuos:

$$\begin{aligned} (I - T) \left(\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n T^k \right) x \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (I - T) \left(\sum_{k=0}^n T^k x \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n T^k x - T^{k+1} x \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n T^k x - \sum_{k=0}^n T^{k+1} x \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (Ix - T^{n+1}x) \\ &= x - \lim_{n \rightarrow \infty} T^{n+1}x = x. \end{aligned}$$

Analogamente, para $x \in X$ ainda arbitrário:

$$\begin{aligned}
\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n T^k \right) ((I - T)x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n T^k ((I - T)x) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n T^k x - \sum_{k=0}^n T^{k+1} x \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (Ix - T^{n+1}x) \\
&= x - \lim_{n \rightarrow \infty} T^{n+1}x = x.
\end{aligned}$$

Portanto, $I - T$ é invertível em $B(X, X)$ e para qualquer $n \in \mathbb{N}$

$$(I - T)y_n = (y_n + (x_n - y_n)) = x_n.$$

Assim, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de Schauder equivalente a $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. \square

Corolário 4.2.1.1. *Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma base de Schauder em X um espaço de Banach e seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência de funcionais de coeficiente associados. Se $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em X e*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| \cdot \|f_n\| < 1,$$

então $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de Schauder de X equivalente a $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Demonstração. Tome $M = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| \cdot \|f_n\| < 1$. Agora, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, sejam c_1, c_2, \dots, c_n escalares arbitrários. Tome $x = \sum_{i=1}^n c_i x_i$. Então:

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^n c_i (x_i - y_i) \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^n f_i(x) (x_i - y_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|f_i(x) (x_i - y_i)\| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \|x_i - y_i\| \|f_i\| \|x\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_i - y_i\| \|f_i\| \|x\| \\
&\leq M \|x\|.
\end{aligned}$$

Pelo teorema 4.2.1, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de Schauder equivalente a $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. \square

Em espaços de Hilbert, podemos reformular o teorema 4.2.1 como:

Teorema 4.2.2 (Paley-Wiener). *Seja $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma base de Schauder ortonormal para um espaço de Hilbert H e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em X . Se existe $0 \leq M < 1$ tal que*

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n (e_n - f_n) \right\| \leq M \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2}$$

para c_1, c_2, \dots escalares arbitrários, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de Riesz de H .

Espaços de Hilbert nos permitem também considerar um caso especial do corolário 4.2.1.1, se $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de Schauder ortonormal de H , acompanha funcionais de coeficiente $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ onde $f_n = \langle x, e_n \rangle$ com $\|f_n\| = 1$. Assim, para toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H$ tal que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n - x_n\| < 1 \quad (4.4)$$

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ será uma base de Riesz.

Ou seja, para uma particular “medida de proximidade” (4.4) de sequências em H a $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, toda sequência suficientemente próxima de $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ será uma base de Riesz.

Voltando aos espaços X de Banach, podemos usar o teorema de Paley-Wiener para produzir um resultado que, de forma semelhante ao anterior, nos garante uma “medida de proximidade” para bases de Schauder, dentro da qual outras sequências em X ainda são bases:

Teorema 4.2.3 (Krein-Milman-Rutman). *Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de Schauder para um espaço de Banach X , então existe uma sequência $(\varepsilon)_{n \in \mathbb{N}}$ de escalares $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: Se $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em X e*

$$\|x_n - y_n\| < \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

então $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de Schauder de X equivalente a $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Demonstração. Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência de funcionais de coeficiente associados a $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Podemos então construir

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2^{n+1} \|f_n\|}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, pelo corolário 4.2.1.1, se $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é tal que $\|x_n - y_n\| < \varepsilon_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| \cdot \|f_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1} \|f_n\|} \|f_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} < 1,$$

então $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ será uma base de Schauder de X equivalente a $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. \square

Bibliografia

- Bartle, R. (1976). *Introduction to Real Analysis, 2nd Edition*, John Wiley & Sons, Incorporated.
- Brezis, H. (1999). *Analyse fonctionnelle: Théorie et applications*, Dunod.
- Kreyszig, E. (1978). *Functional Analysis*, John Wiley & Sons.
- Riesz, F. and Sz.-Nagy, B. (1955). *Functional Analysis*, Dover Publications.
- Young, R. M. (2001). *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series, Revised first edition*, Academic Press.