Introdução à Teoria Espectral em espaços de Hilbert e aplicações em Equações Diferenciais

Proc. Fapesp 2021/14684-5

Vigência: 01/07/2023 - 30/06/2024

Bolsista: Lucas N. F. Teles
Orientadora: Nataliia Goloshchapova

[Versão preliminar, ainda está recebendo correções]

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução à Teoria Espectral

1.1 Espectro e convenções

1.1.1 Resolvente e espectro

Um operador linear $T : \mathrm{Dom}(T) \subseteq X \to X$ representa uma transformação específica de um espaço vetorial $\mathrm{Dom}(T)$ contido em $X \neq \{0\}$. Como seu contradomínio também é X, podemos imaginar que T representa uma transformação na estrutura do espaço X. A teoria espectral se preocupa em estudar como as transformações $T - \lambda I$, transformações T associadas à uma "perturbação" por um operador linear $-\lambda I$, afetam a estrutura de X, onde $\lambda \in \mathbb{C}$ e I é o operador identidade de X[1]. Por exemplo, $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$ nos revela que λ é um autovalor de T, ou seja, que a transformação T apenas escala por λ o subespaço $\ker(T - \lambda I)$.

Pensando em $(T - \lambda I)$ (denotado simplesmente por $T - \lambda$, ou ainda, T_λ) como uma "transformação perturbada", os autovalores representam perturbações que tornam a transformação "irreversível". A teoria espectral procura estender o estudo de autovalores à operadores em espaços X de dimensão infinita. Em particular, dizemos que $(T - \lambda)^{-1}$ existe quando a "transformação perturbada" é invertível sobre sua imagem (i.e. $\ker(T - \lambda) = \{0\}$). Chamamos $(T - \lambda)^{-1}$ de *operador resolvente* e o denotamos por $R_\lambda(T)$ (quando o operador T em questão está claro, podemos omiti-lo e escrever R_λ). Como se pode esperar, o caso de dimensão infinta possibilita à per-

[1] Note que enquanto I é uma identidade para todo X, para considerarmos $T - \lambda I$ como um operador devemos usar I restrito a $\mathrm{Dom}(T)$.

turbação λ algumas formas adicionais de "afetar a reversibilidade de $T-\lambda I$". Por isso, em espaços de dimensão infinita procuramos verificar 3 condições para avaliar se o operador resolvente $R_\lambda(T)$ é suficientemente agradável.

Definição 1.1.1 (Conjunto Resolvente)**.** Tome $T : \mathrm{Dom}(T) \subseteq X \to X$ um operador linear e $X \neq \{0\}$ um espaço normado sobre $\mathbb{C}$. Chamaremos de *conjunto resolvente* o subconjunto $\rho(T) \subseteq \mathbb{C}$ de valores λ tais que

(R1): $(T-\lambda)^{-1}$ existe, isto é, $\ker(T-\lambda) = \{0\}$.

(R2): $(T-\lambda)^{-1}$ é limitado.

(R3): $(T-\lambda)^{-1}$ está definido em um conjunto denso em X.

Escalares $\lambda \in \rho(T)$ são chamados de *valores regulares*.

Chamaremos de *espectro de* T o conjunto

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T).$$

Escalares $\lambda \in \sigma(T)$ são chamados de *valores espectrais* e representam perturbações que "afetam significativamente" a transformação T.

O espectro pode ser dividido em 3 subconjuntos

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T).$$

Descritos a seguir:

1. $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : \ker(T-\lambda) \neq \{0\}\}$ é chamado de *espectro pontual de* T e representa o conjunto dos autovalores de T.

2. $\sigma_c(T) = \{\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T) : \overline{\mathrm{Dom}(R_\lambda(T)))} = X\}$ é chamado de *espectro contínuo de* T e representa o conjunto de escalares λ tais que $(T-\lambda)^{-1}$ existe e está definido em um subconjunto denso de X mas não é limitado.

3. $\sigma_r(T) = \{\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T) : \overline{\mathrm{Dom}(R_\lambda(T)))} \neq X\}$ é chamado de *espectro residual* e consiste nos escalares λ para o qual $(T-\lambda)^{-1}$ existe mas não está definido sobre um conjunto denso em X.

Como discutimos antes, os escalares $\lambda \in \sigma_p(T)$ são os autovalores de T e herdam da intuição geométrica da álgebra linear.

Por outro lado, o espectro contínuo não tem uma interpretação tão imediata mas ele segue como uma "correção" a um dos artifícios que espaços de dimensão infinitos podem explorar: a convergência.

Isto é, se $T : \mathrm{Dom}(T) \subseteq X \to X$ é tal que $\lambda \in \sigma_c(T)$ então temos que $R_\lambda(T)$ existe mas é um operador linear ilimitado. Ou seja, existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathrm{Dom}(R_\lambda(T))$ tal que $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\|R_\lambda(T)x_n\| \to \infty$. Usando $R_\lambda(T)$ como uma forma de reverter a transformação T podemos construir uma sequência $(\frac{R_\lambda(T)x_n}{\|R_\lambda(T)x_n\|})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S_X$ na esfera unitária de X que "aproxima o comportamento de um autovetor", isto é, onde:

$$(T-\lambda)\left(\frac{R_\lambda(T)x_n}{\|R_\lambda(T)x_n\|}\right) = \frac{x_n}{\|R_\lambda(T)x_n\|} \to 0.$$

O espectro residual tem um significado ainda mais nebuloso. Ao longo deste texto exploraremos alguns resultados que elucidam um pouco mais as consequências de um valor espectral estar no espectro residual, assim como a relevância de um operador estar *densamente definido* (i.e. ter como domínio um subconjunto denso de um espaço normado). Uma justificativa, talvez não muito satisfatória, à questão de por que destacar o espectro residual, é que ele é vazio para muitos operadores, em particular para os operadores limitados auto-adjuntos (veja o Teorema 2.1.10).

Apesar de ser razoável imaginar que em espaços de dimensão infinita apenas a noção de autovalor não seria suficiente, é relevante notarmos que a definição do espectro não é forte ao ponto de, em espaços de dimensão finita, ultrapassar o que era compreendido pelos autovalores. Podemos ver isso já que todo operador linear entre espaços de dimensão finita é contínuo e já que, sendo $\ker(T-\lambda) = \{0\}$, T_λ seria um operador linear injetor entre espaços de dimensão finita e portanto teríamos

$$\dim(X) \leq \dim(\mathrm{Dom}(T_\lambda)) \leq \dim(X) \implies \mathrm{Dom}(T_\lambda) = X.$$

Assim, concluímos que $\sigma(T) = \sigma_p(T)$. A seguir voltamos a considerar X um espaço de dimensão arbitrária, exceto quando especificado o contrário. Dito isso vale ressaltar que vários fatos relacionadas a auto-valores se mantém inalterados quando passamos de espaços de dimensão finita à dimensão infinita, verificamos um desses a seguir.

Proposição 1.1.1. *Seja $T : X \to X$ um operador linear sobre um espaço normado X. Se $\lambda_1, ..., \lambda_n$ são diferentes autovalores de T e $\{x_1, ..., x_n\}$ é um conjunto de autovalores de cada, este conjunto é linearmente independente.*

Demonstração. Suponha o conjunto não é linearmente independente,tomamos então x_k como o primeiro vetor que torna o conjunto $\{x_1, ..., x_k\}$ linearmente dependente. Podemos agora escrever

$$x_k = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_{k-1} x_{k-1}$$

e uma vez que x_k é um autovetor associado a λ_k, temos que $(T - \lambda_k I)x_k = 0$. Substituindo x_k pela soma acima, temos:

$$0 = (T - \lambda_k I)x_k = (T - \lambda_k I)\sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j x_j = \sum_{j=1}^{k-1} (\lambda_j - \lambda_k)\alpha_j x_j.$$

Como $\lambda_j - \lambda_k \neq 0$ para todo $j \in \{1, ..., k-1\}$ e $\{x_1, ..., x_{k-1}\}$ é linearmente independente, $\alpha_1 = ... = \alpha_{k-1} = 0$. Ou seja, $x_k = 0$, o que é um absurdo, já que é por hipótese um autovetor. □

1.1.2 Espaços de Banach

O ambiente onde estudaremos a teoria espectral é o dos espaços de Banach, em particular, espaços de Banach complexos. A importância do espaço estar construído em cima do corpo dos complexos está relacionada à recorrente utilidade de teoremas relacionados à análise complexa. Por exemplo, o teorema fundamental da álgebra, enunciado a seguir:

Teorema 1.1.2 (Teorema fundamental da álgebra)**.** *Todo polinômio de grau n e coeficientes complexos*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$$

pode ser fatorado como

$$p(x) = a_n (x - r_1)...(x - r_n),$$

onde $r_1, ..., r_n$ são as raízes do polinômio.

A hipótese de X ser Banach está relacionada à hipótese de T ser um operador em $B(X,X)$ de uma forma natural, já que com ambas hipóteses podemos usar de teoremas importantes da análise funcional como o teorema do gráfico fechado e o teorema da aplicação aberta. Nessas condições, o estudo da teoria espectral de um operador $T : X \to X$ linear e limitado entre espaços de Banach complexos se torna naturalmente um estudo de quando T_λ é um isomorfismo (uma vez que se T é limitado e injetor com imagem fechada, pelo teorema da aplicação aberta, é um isomorfismo). É imediato que se X é um espaço de Banach complexo e $T \in B(X,X)$,

$$T_\lambda : X \to X \text{ é um isomorfismo } \implies \lambda \in \rho(T). \tag{1.1}$$

O teorema a seguir nos garante que esta é uma equivalência.

Teorema 1.1.3. *Se X é um espaço de Banach complexo, $T : X \to X$ é um operador linear limitado e $\lambda \in \rho(T)$, então:*

$$\mathrm{Dom}(R_\lambda) = X.$$

Demonstração. Se $T : X \to X$ é um operador linear, o seu gráfico $\mathcal{G}(T)$ é fechado se, e somente se, para qualquer sequência $(x_n, Tx_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{G}(T)$,

$$(x_n, Tx_n) \to (x, y) \implies (x, y) \in \mathcal{G}(T).$$

Com T limitado, $x_n \to x \implies T(x_n) \to Tx$ para $x, x_1, x_2, ... \in \mathrm{Dom}(T)$. Ou seja, T é fechado se, e somente se, dada qualquer sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathrm{Dom}(T)$ convergente, $\lim_{n\to\infty} x_n \in \mathrm{Dom}(T)$. Como $\mathrm{Dom}(T) = X$ é fechado, temos que T é um operador fechado.

Podemos agora nos restringir ao caso de operadores lineares limitados e fechados: Se T é fechado, $T - \lambda I$ é fechado, já que $(x_n, Tx_n - \lambda x_n) \to (x, y)$ implica que $Tx_n \to y + \lambda x$, portanto $(x, y + \lambda x) \in \mathcal{G}(T)$ e, com isso, $(x, y) \in \mathcal{G}(T - \lambda I)$.

Como $R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1}$, é claro que R_λ também é um operador linear limitado (já que $\lambda \in \rho(T)$) e fechado. Suponha que $y_n \to y$ seja uma sequência em $\mathrm{Dom}(R_\lambda)$ convergente em X. Como $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Dom}(R_\lambda)$, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que $y_n = T_\lambda x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí,

$$\|x_n - x_m\| \leq |R_\lambda y_n - R_\lambda y_m\| \leq \|R_\lambda\| \|y_n - y_m\|, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. Já que X é Banach, existe x tal que $x_n \to x$ e pela continuidade de T, $\lim_{n\to\infty} y_n = Tx \in \mathrm{Dom}(R_\lambda)$. Como $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ foi uma sequência convergente arbitrária, $\mathrm{Dom}(R_\lambda)$ é fechado e

$$\mathrm{Dom}(R_\lambda) = \overline{\mathrm{Dom}(R_\lambda)} = X.$$

□

Assim, quando X é um espaço de Banach complexo e $T \in B(X,X)$ e λ é um valor regular, $T_\lambda : X \to X$ é um operador injetor com imagem $\mathrm{Dom}(R_\lambda) = X$. Como discutido anteriormente, o teorema da aplicação aberta nos garante que T é um isomorfismo e com a equação (1.1),

$$T_\lambda : X \to X \text{ é um isomorfismo } \iff \lambda \in \rho(T).$$

Corolário 1.1.4. *Se X é um espaço de Banach, $T : X \to X$ é um operador linear fechado e $\lambda \in \rho(T)$ então*

$$\mathrm{Dom}(R_\lambda) = X.$$

Demonstração. Pelo teorema do gráfico fechado, segue que $T : X \to X$ é linear e limitado. Basta então aplicar o Teorema 1.1.3. □

Tendo em vista essa discussão, adiante, quando não explicitado o contrário, assumiremos que um espaço de Banach é complexo.

1.2 Propriedades espectrais

Um resultado dá origem a vários teoremas fundamentais na teoria espectral de espaços de Banach, este é o da convergência das *séries de Neumann*, séries $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ de operadores $T \in B(X,X)$ para $\|T\| < 1$.

1.2.1 Séries de Neumann

Proposição 1.2.1. *Se X é um espaço de Banach e $T \in B(X,X)$ é tal que $\|T\| < 1$, temos que $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ é um operador em $B(X,X)$ e*

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k = (I - T)^{-1}.$$

Demonstração. $S = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$ estará bem definido como um operador se para qualquer $x \in X$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k x := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} T^k x$$

convergir, que será verdade em X Banach se $\left(\sum_{k=0}^{n} T^k x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma sequência de Cauchy. Para ver que este é o caso, note que

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} T^k x - \sum_{k=0}^{m} T^k x \right\| = \left\| \sum_{k=m}^{n} T^k x \right\| \leq \sum_{k=m}^{n} \|T^k\| \|x\|,$$

$\|T^k\| \leq \|T\|^k$ e que $\sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k$ é uma série convergente em $\mathbb{R}$ para $\|T\| < 1$.

Em particular, com $n \to \infty$:

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} T^k x - \sum_{k=0}^{m} T^k x \right\| \leq \left(\sum_{k=m}^{\infty} \|T\|^k \right) \|x\|. \tag{1.2}$$

Tomando $m = 0$ verificamos que S é limitada. A linearidade de S, por sua vez, é uma consequência da linearidade dos operadores T^k:

$$\begin{aligned} S(x + \alpha y) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} T^k (x + \alpha y) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} T^k x + \alpha T^k y \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} T^k x + \alpha \sum_{k=0}^{n} T^k y = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} T^k x + \alpha \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} T^k y \\ &= Sx + \alpha Sy, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x, y \in X. \end{aligned}$$

Por fim, tomando $x \in X$ qualquer,

$$\begin{aligned} S(I - T)x &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} T^k((I - T)x) = \lim_{n\to\infty} (T^0 x - T^{n+1} x) \\ &= x - \lim_{n\to\infty} T^{n+1} x = x, \\ (I - T)Sx &= (I - T) \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} T^k(x) = \lim_{n\to\infty} (I - T) \left(\sum_{k=0}^{n} T^k x \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} (T^0 x - T^{n+1} x) = x. \end{aligned}$$

Ou seja, $S = (I - T)^{-1}$. Por fim, veja que $(I - T)$ é limitada por ser uma combinação de operadores lineares limitados. □

Observação. *Note que este teorema garante que $(T-I)^{-1}$ existe, é limitado e está definido em todo o espaço X.*

A relevância das séries de Neumann pode ser escondida pela aparente restrição de sua utilidade à um nicho muito específico de operadores com norma $\|T\| < 1$. Porém, ela é uma ferramenta muito pertinente a operadores no geral, como veremos adiante. O primeiro exemplo da sua importância que exploraremos é ilustrado no teorema a seguir.

Lema 1.2.2. *Se X é um espaço de Banach complexo e $T : X \to X$ é um operador linear e limitado, então $\rho(T)$ é um conjunto aberto de $\mathbb{C}$. Em particular, se $\lambda_0 \in \rho(T)$ temos*

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}(T)\|} \implies \lambda \in \rho(T).$$

Neste caso, $R_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k R_{\lambda_0}^{k+1}(T)$.

Demonstração. Se $\rho(T) = \emptyset$, é um aberto. Se $\rho(T) \neq \emptyset$ tome $\lambda_0 \in \rho(T)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Podemos pensar em $T - \lambda I$ como uma transformação $T - \lambda_0 I$ com uma perturbação adicional $-(\lambda - \lambda_0)I$:

$$T - \lambda I = (T - \lambda_0 I) - (\lambda - \lambda_0)I = (T - \lambda_0 I)(I - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(T)).$$

Assim, se $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}(T)\|}$, temos que $\|(\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(T)\| < 1$ e pela Proposição 1.2.1, $(I - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(T))$ é invertível e tem como inversa $\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k R_{\lambda_0}^k(T)$. Como composição de operadores invertíveis com inversas limitadas, $(T - \lambda I)$ é invertível e limitado com inversa

$$\begin{aligned} R_\lambda(T) &= (I - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(T))^{-1}(T - \lambda_0 I)^{-1} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k R_{\lambda_0}^k(T) \right) R_{\lambda_0}(T) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k R_{\lambda_0}^{k+1}(T). \end{aligned}$$

Além disso, note que $R_\lambda(T)$ está definido para todo $x \in \mathrm{Dom}(R_{\lambda_0}(T))$ portanto $\overline{\mathrm{Dom}(R_\lambda(T))} = \overline{\mathrm{Dom}(R_{\lambda_0}(T))} = X$. Daí, temos $\lambda \in \rho(T)$ e, com isso, $B_{\mathbb{C}}(\lambda_0, \frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}) \subseteq \rho(T)$ para $\lambda_0 \in \rho(T)$ arbitrário. Portanto $\rho(T)$ é aberto e $\sigma(T)$, como seu complemento, é fechado. $\square$

A importância desses últimos teoremas será ilustrada ao longo desse texto, mas trazemos atenção ao fato de que estes dependem da hipótese de $T : \text{Dom}(T) \subseteq X \to X$ ser um operador com $\text{Dom}(T) = X$ e deste ser um espaço de Banach. Ainda usando séries de Neumann conseguimos outra restrição sobre o conjunto $\sigma(T)$ para $T \in B(X, X)$ sobre um espaço de Banach:

Lema 1.2.3. *Seja X é um espaço de Banach complexo e $T : X \to X$ um operador linear limitado. Então se $\lambda \in \sigma(T)$,*

$$|\lambda| \leq \|T\|.$$

Isto é, o espectro de T está contido no disco de raio $\|T\|$ entorno da origem do plano complexo.

Demonstração. Tome $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Podemos então reescrever $(T - \lambda I)$ da seguinte maneira:

$$(T - \lambda I) = -\lambda(I - \tfrac{1}{\lambda}T).$$

Daí, se $|\lambda| > \|T\|$, então $\|\frac{1}{\lambda}T\| < 1$ e $(I - \frac{1}{\lambda}T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k}T^k$. Com isso,

$$(T - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k}T^k\right) = -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k}T^k, \qquad \forall |\lambda| > \|T\|. \tag{1.3}$$

Da Proposição 1.2.1, segue que R_λ é linear e limitado com domínio X. Portanto, $\sigma(T) \subseteq B_{\mathbb{C}}(0, \|T\|)$. □

Junto com o Teorema **??**, que enunciaremos mais adiante, o teorema a seguir é o que usa mais explicitamente da hipótese de X ser um espaço de Banach complexo. Refletindo isso, sua demonstração depende de uma quantidade considerável de resultados de análise complexa que assumiremos conhecidos.

Teorema 1.2.4. *Se $X \neq \{0\}$ é um espaço de Banach complexo e $T : X \to X$ é um operador linear contínuo, então seu espectro $\sigma(T)$ é não vazio.*

Demonstração. Se $T = 0$, então $\sigma(T) = \{0\} \neq \emptyset$. Caso contrário, temos $\|T\| > 0$ e da equação (1.3), para todo $\lambda > \|T\|$ temos

$$R_\lambda = -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda}T\right)^k.$$

Pensando na função $\lambda \mapsto R_\lambda$, e em $|\lambda| > \|T\|$ temos

$$\|R_\lambda\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda} T\right)^k \right\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{\lambda} T \right\|^k.$$

Assumindo $|\lambda| > 2\|T\|$ temos que os termos de $\sum_{k=0}^{\infty} \left\|\frac{1}{\lambda}T\right\|^k$ formam uma progressão geométrica de razão $\|\frac{1}{\lambda}T\| < \frac{1}{2}$ e portanto a série converge para $\frac{1}{1-\|T/\lambda\|}$. Assim,

$$\|R_\lambda\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \|T/\lambda\|} \leq \frac{1}{\|T\|}, \qquad \forall |\lambda| > \|T\|. \tag{1.4}$$

Agora, suponha que $\sigma(T) = \emptyset$, isto é, que $\rho(T) = \mathbb{C}$. Tomando $f \in X^*$ e $x \in X$ quaisquer fixos, podemos definir $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ onde

$$h(\lambda) = f(R_\lambda x).$$

Usando o Lema 1.2.2 e a continuidade de f, para qualquer $\lambda_0 \in \rho(T) = \mathbb{C}$, quando $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}$, temos

$$\begin{aligned} h(\lambda) &= f\left(\left(\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k R_{\lambda_0}^{k+1} x\right)\right) \\ &= f\left(\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k R_{\lambda_0}^{k+1} x\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k f(R_{\lambda_0}^{k+1} x). \end{aligned}$$

Ou seja, $h(\lambda)$ coincide com uma série de potências na bola aberta $B_{\mathbb{C}}(\lambda_0; \|R_{\lambda_0}\|)$ e uma vez que a série $\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k R_{\lambda_0}^{k+1}$ é absolutamente convergente em $B_{\mathbb{C}}(\lambda_0; \|R_{\lambda_0}\|)$, $\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k f(R_{\lambda_0}^{k+1} x)$ também será. Assim, $h(\lambda)$ é diferenciável em $B_{\mathbb{C}}(\lambda_0; \|R_{\lambda_0}\|)$ para qualquer $\lambda_0 \in \mathbb{C}$.

Assim, independente da escolha de $f \in X^*$ e $x \in X$, h é uma função inteira. Como a bola fechada $\overline{B_{\mathbb{C}}(\lambda_0; \|T\|)}$ é compacta, a função h restrita a esse conjunto admite um valor máximo $m \in \mathbb{C}$. Da equação (1.4) verificamos que

$$|h(\lambda)| \leq \|f\| \|R_\lambda\| \|x\| \leq \|f\| \frac{1}{\|T\|} \|x\|.$$

Assim, h é uma função inteira limitada por $\max\{m, \|f\|\frac{1}{\|T\|}\|x\|\}$ em todo seu domínio. Pelo teorema de Liouville, h é uma função constante. Com isso temos que para quaisquer $\lambda, \lambda_0 \in \mathbb{C}$ e $x \in X$,

$$f(R_\lambda x - R_{\lambda_0} x) = 0, \qquad \forall f \in X^* \implies R_\lambda x = R_{\lambda_0} x.$$

Como $x \in X$ é arbitrário, temos $R_\lambda = R_{\lambda_0}$. Segue que

$$T - \lambda I = (R_\lambda)^{-1} = (R_{\lambda_0})^{-1} = T - \lambda_0 I$$

e consequentemente que $\lambda = \lambda_0$, um absurdo. □

Como $\sigma(T)$ não necessariamente atinge a esfera de raio $\|T\|$, podemos considerar qual é a maior esfera que $\sigma(T)$ efetivamente atinge e, possivelmente, ter uma imagem melhor do espectro de T. Para este fim trazemos a definição a seguir:

Definição 1.2.1 (Raio espectral)**.** Se $T : X \to X$ é um operador linear limitado e $\sigma(T)$ é o seu espectro, chamamos de raio espectral a constante

$$r_\sigma(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|.$$

Note que, como o espectro é fechado e não-vazio,

$$\sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|.$$

Isto é, existe $\lambda_0 \in \sigma(T)$ com $|\lambda_0| = r_\sigma(T)$.

1.2.2 Comutatividade e consequências

O estudo de perturbações no formato $-\lambda I$, traz consigo uma vantagem característica da identidade: A comutatividade. Se $S : \mathrm{Dom}(S) \subseteq X \to X$ é um operador linear qualquer, $S(-\lambda I) = (-\lambda I)S$, e dizemos que S e $(-\lambda I)$ comutam. Com isso, veja que se T e S são operadores lineares que comutam, S, T_λ e R_λ comutam entre si:

$$(T - \lambda I)S = TS - \lambda IS = ST + S(-\lambda I) = S(T - \lambda I).$$

Para o resolvente, usamos da comutatividade inerente a funções invertíveis, $T_\lambda R_\lambda = R_\lambda T_\lambda = I$:

$$R_\lambda S = R_\lambda S I = R_\lambda S T_\lambda R_\lambda = R_\lambda T_\lambda S R_\lambda = I S R_\lambda = S R_\lambda.$$

O estudo da comutatividade do resolvente nos dá o seguinte resultado:

Teorema 1.2.5 (Primeira identidade do resolvente)**.** *Seja $T \in B(X, X)$ para X um espaço de Banach complexo. Dados $\lambda, \mu \in \rho(T)$ quaisquer, R_λ e R_μ comutam e*

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\lambda - \mu)R_\lambda(T)R_\mu(T).$$

Demonstração. Como T comuta consigo mesmo, sabemos que T e R_μ, e consequentemente R_λ e R_μ, comutam (note que, pelo Teorema 1.1.3, T, R_λ e R_μ estão definidos sobre todo o conjunto X). Usando que os operadores resolventes tem T_λ e T_μ como inversas, podemos escrever:

$$R_\lambda - R_\mu = R_\lambda T_\mu R_\mu - R_\lambda T_\lambda R_\mu = R_\lambda(T_\mu - T_\lambda)R_\mu = (\lambda - \mu)R_\lambda R_\mu.$$

□

Outro resultado importante é uma versão do teorema do mapa espectral para polinômios, que nos dá uma forma geral para o espectro de polinômios de operadores.

Teorema 1.2.6 (Teorema do mapa espectral para polinômios)**.** *Se X é um espaço de Banach complexo, $T \in B(X, X)$ e $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_0$ é um polinômio,*

$$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T)),$$

onde $p(\sigma(T)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\}$ e $p(T) = a_n T^n + a_{n-1}T^{n-1} + ... + a_0$.

Demonstração. Primeiro, note que $p(T) \in B(X, X)$ já que é a combinação linear de operadores no formato T^k (para $k \leq n$) e como estes são a composição de operadores lineares e limitados, são também lineares e limitados. Com isso temos pelo Teorema 1.2.4 que $\sigma(T)$ e $\sigma(p(T))$ não vazios.

Agora, note que o caso $n = 0$ se resume a

$$\sigma(p(T)) = \sigma(a_0 I) = \{a_0\} = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\} = p(\sigma(T)).$$

Para $n \geq 1$, chamaremos de S o operador $p(T)$ e $S_\mu = p(T) - \mu I$ para $\mu \in \mathbb{C}$ fixo. Como $p(\lambda) - \mu$ é um polinômio, pelo teorema fundamental da álgebra, podemos fatorá-lo da seguinte forma:

$$p(\lambda) - \mu = a_n(\lambda - \lambda_n)(\lambda - \lambda_{n-1})...(\lambda - \lambda_1)$$

onde $\lambda_1, ..., \lambda_n$ são as suas raízes. Como X é complexo e os operadores $T - \lambda_j I$ estão bem definidos para $1 \leq j \leq n$, podemos[2] considerar a expressão anterior adaptada para o caso da composição de operadores:

$$S_\mu = p(T) - \mu I = a_n(T - \lambda_n I)(T - \lambda_{n-1} I)...(T - \lambda_1 I). \tag{1.5}$$

Se todos os $\lambda_1, ..., \lambda_n$ são valores regulares, cada operador $(T - \lambda_j I)$ é invertível com inversa limitada e definida para todo X (teorema 1.1.3) e consequentemente S_μ é invertível com inversa contínua e com domínio $\mathrm{Dom}(R_\mu(S)) = X$ e portanto $\mu \in \rho(S)$. Temos então que se $\mu \in \sigma(p(T))$, $\lambda_j \in \sigma(T)$ para algum $j \in \{1, ..., n\}$. Como λ_j é uma raiz de $p(\lambda) - \mu$, $p(\lambda_j) - \mu = 0 \implies p(\lambda_j) = \mu$ e temos

$$\mu \in \sigma(p(T)) \implies \mu \in p(\sigma(T)). \tag{1.6}$$

Agora, consideremos $\mu \in p(\sigma(T))$. Então existe $\lambda_0 \in \sigma(T)$ tal que $p(\lambda_0) = \mu$. O que nos dá duas possibilidades:

1. $T - \lambda_0 I$ não tem inversa. Como $p(\lambda_0) = \mu$, λ_0 é uma raiz de $p(\lambda) - \mu$, ou seja, podemos reescrever S_μ como

$$S_\mu = (T - \lambda_0 I) \underbrace{a_n(T - \lambda_{n-1} I)...(T - \lambda_1 I)}_{q(T)} \tag{1.7}$$

   Se $\mu \in \rho(p(T))$, existiria S_μ^{-1} e, uma vez que todos os termos $T - \lambda_j I$ para $0 \leq j \leq n-1$, S_μ e S_μ^{-1} comutam entre si, teríamos

$$(T - \lambda_0 I) q(T) S_\mu^{-1} = q(T) S_\mu^{-1} (T - \lambda_0 I) = I$$

   e com isso, que $T - \lambda_0$ é invertível, um absurdo. Então neste caso $\mu \in \sigma(p(T))$.

2. $T - \lambda_0 I$ tem inversa. Com isso, $\mathrm{Img}(T - \lambda_0 I) \neq X$. Caso contrário pelo teorema da aplicação aberta, $T - \lambda_0 I$ teria inversa contínua, o que contradiria a hipótese de que $\lambda_0 \in \sigma(T)$. Já que S_μ é a composição de $T - \lambda_0$ e $q(T)$ em (1.7), $\mathrm{Img}(S_\mu) \neq X$. E, pelo teorema 1.1.3, se μ fosse um valor regular S_μ teria $\mathrm{Img}(S_\mu) = X$, temos então que $\mu \in \sigma(p(T))$.

[2]Uma vez que T e I comutam, a expansão para $p(T) - \lambda I$ segue as mesmas propriedades distributivas que $p(\lambda)$ e portanto temos a Equação (1.5).

Em ambos os casos,

$$\mu \in p(\sigma(T)) \implies \mu \in \sigma(p(T)). \tag{1.8}$$

Por fim, concluímos com (1.6) e (1.8) que $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$. □

Como mencionamos anteriormente, o teorema seguinte é outro cuja demonstração depende significativamente de artifícios da análise complexa.

1.3 Operadores compactos

Um fato bem conhecido da análise funcional diz que um espaço normado X tem dimensão finita se, e somente se, a sua bola fechada unitária centrada na origem for compacta. Refletindo essa equivalência, os operadores compactos representam uma forma de reter alguns aspectos de operadores lineares definidos em espaços de dimensão finita mesmo quando definidos sobre um espaço de dimensão infinita. Nesta seção estudaremos a teoria espectral dessa classe de operadores.

Esta seção em particular se destaca por não necessitar em sua maioria da hipótese de X ser um espaço de Banach complexo. Refletindo isso, as "propriedades espectrais" que exploraremos consistem por grande parte de resultados gerais sobre operadores da forma T_λ sem necessitar do plano complexo ou da noção do espectro.

1.3.1 Propriedades iniciais de operadores compactos

Definição 1.3.1 (Operador linear compacto)**.** Se X e Y são espaços normados e $T : X \to Y$ um operador linear, dizemos que T é um operador linear compacto se satisfaz a seguinte condição:

Para qualquer conjunto $A \subseteq X$ limitado, $\overline{T(A)}$ é compacto em Y.

Observação. *Uma consequência imediata da definição de operadores compactos é que eles são contínuos. Para verificar isso basta notar que se $T : X \to X$ é um operador linear compacto sobre um espaço normado X, a bola unitária fechada $B_X(0,1)$ é limitada e portanto $\overline{T(B_X(0,1))}$ é um compacto, também limitado. Como $T(B_X(0,1)))$ está contido em um conjunto limitado, temos que T é um operador linear limitado. Adiante assumimos esse fato implicitamente.*

Uma importante caracterização de operadores compactos vem do fato que, em espaços normados, é equivalente dizer que um conjunto é compacto e que toda sequência nele admite uma subsequência convergente no conjunto. A seguir mostramos como esse fato se manifesta em operadores compactos.

Lema 1.3.1. *Um operador linear $T : X \to Y$, entre espaços normados X e Y, é compacto se, e somente se, a imagem de qualquer sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ limitada, $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ admite uma subsequência convergente.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $T : X \to Y$ um operador linear compacto. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada, existe $r > 0$ tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq rB_X$. Como rB_X é um conjunto limitado, $\overline{T(rB_X)}$ é um conjunto compacto, e portanto, sequencialmente compacto e $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq T(rB_X) \subseteq \overline{T(rB_X)}$, então $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência convergente em $\overline{T(rB_X)}$.

($\Leftarrow$) Seja $T : X \to Y$ um operador linear com a propriedade de que a imagem de sequências limitadas é uma sequência com subsequência convergente. Tome um conjunto limitado qualquer A e suponha que $\overline{T(A)}$ não é compacto. Neste caso existe uma sequência $(\bar{y}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{T(A)}$ que não tem subsequência convergente. Como esta sequência está no fecho, podemos construir uma sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq T(A)$ tal que $\|y_n - \bar{y}_n\| < \frac{1}{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Uma vez que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq T(A)$, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ limitada, tal que $Tx_n = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por hipótese, existe uma subsequência $(y_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergindo a $y \in \overline{T(A)}$. Por fim, vemos que

$$\|y - \bar{y}_{n_j}\| \leq \|y - y_{n_j}\| + \|y_n - \bar{y}_{n_j}\|$$

e segue de imediato que $\bar{y}_{n_j} \to y$, um absurdo. $\square$

Outro fato importante na teoria dos operadores compactos é que para um espaço de Banach X, "o espaço de operadores lineares compactos $B_0(X, X)$ é um *ideal* fechado em $B(X, X)$". Isto é, a composição entre um operador linear compacto $T : X \to X$ e um operador linear limitado $S : X \to X$ forma um operador linear compacto.

Informalmente, pensando em operadores compactos como operadores que convertem sequências limitadas em sequências com subsequências convergentes, e operadores limitados como operadores que preservam a limitação e convergência de sequências (e consequentemente subsequências), vemos que a composição de operadores limitados com operadores compactos não deve afetar o comportamento que caracteriza a compacidade. Expressamos essa ideia de forma precisa com o lema a seguir.

Proposição 1.3.2. *Sejam X um espaço normado, $T : X \to X$ um operador linear compacto e $S : X \to X$ um operador linear limitado, então $ST : X \to X$ e $TS : X \to X$ são ambos operadores lineares compactos.*

Demonstração. Seja $A \subseteq X$ um conjunto limitado arbitrário. Como T é um operador linear limitado, $T(A)$ ainda é um conjunto limitado em X e $ST(A) = S(T(A))$ é um conjunto relativamente compacto. Ou seja, ST é um operador compacto.

Agora, tome $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em X. Já que S é compacto, $(Sx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência $(Sx_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ convergente em $\overline{S((x_n)_{n\in\mathbb{N}})}$ e, como T é limitado, $(TS(x_{n_j}))_{j\in\mathbb{N}}$ é convergente em $\overline{TS((x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}})}$. Ou seja, TS é um operador compacto. □

1.3.2 Propriedades espectrais de operadores compactos

A equivalência entre a compacidade da bola unitária fechada e a dimensão do espaço que a contém, mencionada no início desta seção, é demonstrada usualmente empregando o lema a seguir:

Teorema 1.3.3 (Lema de Riesz). *Se X é um espaço normado e Y um subespaço fechado próprio de X, para qualquer $\theta \in [0, 1)$ existe $x \in S_X$ tal que $\|x - y\| \geq \theta$ para todo $y \in Y$.*

Veremos, através de um argumento similar à demonstração do teorema da bola unitária, uma consequência importante de um operador ter imagem relativamente compacta.

Teorema 1.3.4. *Se X é um espaço normado e $T : X \to X$ um operador linear compacto, o conjunto $\sigma_p(T)$ de autovalores de T é no máximo enumerável (podendo ser finito ou vazio). E o único ponto de acumulação deste de $\sigma_p(T)$ é $\lambda = 0$.*

Demonstração. Suponha que, para algum $k > 0$, existam infinitos autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, ...$ tais que $|\lambda_n| > k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, podemos tomar uma sequência $x_1, x_2, ...$ de autovetores associados a cada um destes autovalores. Como estes são linearmente independentes (Proposição

1.1.1), podemos definir subespaços $M_0 = \{0\}$ e $M_n = \text{span}\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ que formam uma sequência

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq ... \subseteq M_n \subseteq ...$$

onde cada $x \in M_n$ tem uma representação única $x = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n$. Como cada subespaço M_{n-1} é um subespaço próprio de M_n e fechado (pois tem dimensão finita), para qualquer $n \in \mathbb{N}$, pelo Lema de Riesz podemos definir uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vetores $u_n \in M_n$ onde $\|u_n\| = 1$ e $\|u_n - x\| \geq \frac{1}{2}$ para todo $x \in M_{n-1}$. Agora, veja que, dados $n, m \in \mathbb{N}$, com $m < n$:

$$\begin{aligned} Tu_n - Tu_m &= \lambda_n u_n + (T - \lambda_n)(u_n) - Tu_m \\ &= \lambda_n u_n + (T - \lambda_n)\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) - Tu_m \\ &= \lambda_n u_n + \underbrace{\left(\sum_{i=i}^{n-1} \alpha_i(\lambda_i - \lambda_n) x_i\right) - Tu_m}_{\in M_{n-1}} \end{aligned}$$

Definindo $w = -(\sum_{i=i}^{n-1} \alpha_i(\lambda_i - \lambda_n)x_i - Tu_m)/\lambda_n \in M_{n-1}$ temos que:

$$\|Tu_n - Tu_m\| = \|\lambda_n u_n - \lambda_n w\| = |\lambda_n|\|u_n - w\| \geq \frac{|\lambda_n|}{2} \geq \frac{k}{2}.$$

Portanto, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência na esfera unitária (limitada) cuja imagem por T não admite subsequência convergente. Um absurdo, já que T é um operador compacto.

Por fim, como $k > 0$ é arbitrário temos que o único ponto de acumulação possível de $\sigma_p(T)$ é $\lambda = 0$ e escrevendo

$$\sigma_p(T) \subseteq \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\lambda \in \sigma_p(T) : |\lambda| > \frac{1}{n}\right\}$$

vemos que $\sigma_p(T)$, como a união enumerável de conjuntos finitos, é enumerável. $\square$

O primeiro resultado que veremos que diretamente relaciona um operador compacto com espaços de dimensão finita, como antecipado no começo desta seção, é o seguinte.

Teorema 1.3.5. *Sejam X um espaço normado e $T : X \to X$ um operador linear compacto. Então se $\lambda \neq 0$ é um autovalor de T, o autoespaço* $\ker(T_\lambda)$ *associado a λ tem dimensão finita.*

Demonstração. Seja $\lambda \neq 0$ um autovalor de T e $B_{\ker(T_\lambda)} := \overline{B_X(0, \ker(T_\lambda))}$ a bola unitária fechada do autoespaço associado a λ. Tomamos então uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $B_{\ker(T_\lambda)}$ qualquer.

Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \lambda B_{\ker(T_\lambda)}$ é uma sequência com subsequência $(\lambda x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente. Como $\lambda \neq 0$, existem $x \in \lambda B_{\ker(T_\lambda)}$ e $\frac{1}{\lambda}x \in B_{\ker(T_\lambda)}$ tais que

$$\lambda x_{n_k} \to x \implies x_{n_k} \to \tfrac{1}{\lambda}x$$

Assim, temos que toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ na bola unitária fechada de $\ker(T_\lambda)$ admite uma subsequência convergente. Ou seja, $B_{\ker(T_\lambda)}$ é compacta e portanto $\ker(T_\lambda)$ é um espaço de dimensão finita. □

Corolário 1.3.6. *Se X é um espaço normado, T um operador linear compacto e $\lambda \neq 0$ um autovalor de T, então todo autoespaço generalizado de λ tem dimensão finita. Isto é,*

$$\dim(\ker((T_\lambda)^n)) < +\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Tome $n \in \mathbb{N}$ e $\lambda \neq 0$ arbitrários. Como a composição de operadores satisfaz a propriedade distributiva e os operadores $-\lambda I$ e T comutam entre si, podemos usar o teorema binomial para expandir o operador $T_\lambda^n := (T_\lambda)^n$ (adotaremos essa notação adiante) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T_\lambda^n = (T - \lambda I)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-\lambda)^{n-k} T^k \\ &= (-\lambda)^n I + T \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-\lambda)^{n-k} T^{k-1}}_{S}. \end{aligned}$$

Ou seja, podemos pensar em $T_\lambda^n = W - \mu I$ onde $W = TS$ e $\mu = -(-\lambda)^n \neq 0$. Como T é um operador compacto e S é limitado (é uma combinação linear de operadores T^k limitados), $W = TS$ é um operador compacto (Proposição 1.3.2). Assim, pelo Teorema 1.3.5,

$$\dim(\ker(T_\lambda^n)) = \dim(\ker(W - \mu I)) < +\infty.$$

□

Avançamos agora para a segunda etapa da nossa análise de operadores compactos "perturbados". Dando continuidade à analogia entre operadores compactos e operadores entre espaços de dimensão finita, investigaremos agora como algumas propriedades de operadores T_λ, com T compacto e $\lambda \neq 0$, remetem ao teorema do núcleo e da imagem, que diz que, para operadores lineares $T : X \to Y$ entre espaços de dimensão finita vale:

$$\dim(T(X)) + \dim(\ker(T)) = \dim(X).$$

A maior divergência entre o que estudaremos a seguir e este teorema é que, em vez de uma avaliação numérica da dimensão dos espaços, estudaremos como $\ker(T_\lambda)$ e T_λ (e suas potências $\ker(T_\lambda^n)$ e $T_\lambda^n(X)$) se dispõe como subespaços de X.

É um fato bem conhecido que o núcleo $\ker(T_\lambda^n)$ de um operador limitado T_λ^n é fechado. O nosso primeiro passo para começar a estudar os subespaços $\ker(T_\lambda)$ e T_λ é verificar que as imagens de T_λ e T_λ^n, para $n \geq 0$, também são subespaços fechados, para T um operador linear compacto e $\lambda \neq 0$.

Lema 1.3.7. *Se X é um espaço normado e $T : X \to X$ é um operador linear compacto, então para todo $\lambda \neq 0$ a imagem de T_λ é fechada.*

Demonstração. Assuma que $T_\lambda(X)$ não é fechada e tome $y \in \overline{T_\lambda(X)} \setminus T_\lambda(X)$. Então, existe uma sequência $(T_\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq T_\lambda(X)$ tal que $T_\lambda x_n \to y$. Como $y \neq 0$, já que $0 \in T_\lambda(X)$, podemos assumir também que $x_n \geq \|y\|/2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (como $(T_\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para y, a partir de certo ponto n_0 existe uma subsequência $(T_\lambda x_n)_{n\geq n_0}$ que só tem valores maiores que $\|y\|/2$). Com isso,

$$d(x_n, \ker(T_\lambda)) := \inf_{z\in\ker(T_\lambda)} \|x_n - z\| > 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Podemos então tomar $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \ker(T_\lambda)$ tal que $\|x_n - z_n\| < 2d(x_n, \ker(T_\lambda))$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostraremos a seguir que podemos assumir que

$$\|x_n - z_n\| \to \infty. \tag{1.9}$$

Suponha que (1.9) não ocorre, então existe uma subsequência de $(x_n - z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitada[3], como T é compacto, a imagem dessa subsequência admite uma

[3] Supomos isso para provar que $(x_n - z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é ilimitada. Neste caso, haverá uma subsequência $(x_{n_j} - z_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ que garante $\|x_{n_j} - z_{n_j}\| \to \infty$. Para simplificar a notação, assumimos que a sequência original $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ já foi escolhida para garantir isso.

subsequência $(T(x_{n_k} - z_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ convergente. Note então que, podemos usar a linearidade de T_λ e T para reescrever $(x_n - z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em termos de T e T_λ:

$$x_n - z_n = \frac{1}{\lambda}(T(x_n - z_n) - T_\lambda(x_n - z_n)), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Simplificando $T_\lambda z_n = 0$ temos que a subsequência $(x_{n_k} - z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ pode ser escrita como a combinação linear de duas sequências convergentes:

$$x_{n_k} - z_{n_k} = \frac{1}{\lambda}(T(x_{n_k} - z_{n_k}) - T_\lambda x_{n_k}).$$

E portanto $(x_{n_k} - z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge para algum $u \in X$. Como T_λ é contínua,

$$T_\lambda x_{n_k} = T_\lambda(x_{n_k} - z_{n_k}) \to T_\lambda u \in T(X).$$

Como $T_\lambda x_n$ converge para y, $y = T_\lambda u \in T(X)$, um absurdo. Ou seja, podemos assumir que (1.9) vale.

Agora, movemos a sequência $(x_n - z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para a esfera unitária construindo uma nova sequência $w_n = \frac{1}{\|x_n - z_n\|}(x_n - z_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Teremos então que ela é uma sequência tal que

$$T_\lambda w_n = \frac{1}{\|x_n - z_n\|} T_\lambda x_n \to 0. \tag{1.10}$$

Usando novamente T_λ e T para reescrever $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ temos:

$$w_n = \frac{1}{\lambda}(Tw_n - T_\lambda x_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como T é compacto e $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S_X := \{x \in X : \|x\| = 1\}$ é limitada, admite uma subsequência $(Tw_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ convergente. Uma vez que $(w_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ é a combinação linear de sequências convergentes, é convergente. Ou seja, existe $w \in X$ tal que $w_n \to w$. Como T_λ é contínua, $T_\lambda w_n \to T_\lambda w = 0$ (por (1.10)) e $w \in \ker(T_\lambda)$. Portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} d(x_n, \ker(T_\lambda)) &\leq \|x_n - (z_n + \|x_n - z_n\| w)\| \\ &= \|x_n - z_n\| \|w_n - w\| \\ &< 2d(x_n, \ker(T_\lambda)) \|w_n - w\|. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{1}{2} < \|w_n - w\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

mas $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente. Um absurdo. Ou seja, $\overline{T_\lambda(X)} \setminus T_\lambda(X) = \emptyset$ e T_λ tem imagem fechada em X. $\square$

Corolário 1.3.8. *Se X é um espaço normado, $T : X \to X$ é um operador linear compacto, $\lambda \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, a imagem de T_λ^n é fechada.*

Demonstração. Seguindo os mesmos passos da demonstração do Corolário 1.3.6, podemos representar T_λ^n como $T_\lambda^n = W - \mu I$ onde $\mu \neq 0$ e W é compacto. Então segue do Lema 1.3.7 que isto é verdade. $\square$

Veja que para $T_\lambda^0 = I$, temos $\ker(T_\lambda^0) = \{0\}$ e consequentemente $\ker(T_\lambda^0) \subseteq \ker(T_\lambda)$. Supondo que $\ker(T_\lambda^{k-1}) \subseteq \ker(T_\lambda^k)$ podemos estender essa relação adiante usando que $T_\lambda^{k+1}(x) = T_\lambda(T_\lambda^k(x))$:

$$T_\lambda^{k+1}(\ker(T_\lambda^k)) = T_\lambda(T_\lambda^k(\ker(T_\lambda^k))) = T_\lambda(\{0\}) \subseteq \ker(T_\lambda^{k+1}).$$

Ou seja, $\ker(T_\lambda^k) \subseteq \ker(T_\lambda^{k+1})$. Pelo Princípio da Indução Finita temos então

$$\{0\} = \ker(T_\lambda^0) \subseteq \ker(T_\lambda) \subseteq \ker(T_\lambda^2) \subseteq ... \subseteq \ker(T_\lambda^n) \subseteq ... \tag{1.11}$$

Similarmente, note que $T_\lambda^0(X) = I(X) = X$ e $T(X) \subseteq X$. Supondo $T^k(X) \subseteq T^{k-1}(X)$, basta ver que $T^{k+1} = T(T^k(X))$ e teremos

$$T^{k+1}(X) = T(T^k(X)) \subseteq T(T^{k-1}(X)) = T^k(X).$$

Pelo Princípio da Indução Finita verificamos que

$$X = T^0(X) \supseteq T(X) \supseteq T^2(X) \supseteq ... \supseteq T^n(X) \supseteq ... \tag{1.12}$$

Como veremos a seguir, podemos nos aprofundar ainda mais no estudo da relação entre os núcleos e as imagens de T_λ^n para diferentes valores de n.

Proposição 1.3.9. *Seja X um espaço normado, $T : X \to X$ um operador linear compacto e $\lambda \neq 0$. Então existe $p \geq 0$ tal que*

$$\{0\} = \ker(T_\lambda^0) \subsetneq ... \subsetneq \ker(T_\lambda^p) = \ker(T_\lambda^{p+1}) = ... \tag{1.13}$$

Demonstração. Suponha que não existe $p \geq 0$ tal que $\ker(T_\lambda^p) = \ker(T_\lambda^{p+1})$. Então

$$\{0\} = \ker(T_\lambda^0) \subsetneq \ker(T_\lambda) \subsetneq ... \subsetneq \ker(T_\lambda^n) \subsetneq ...$$

Como o núcleo de um operador linear limitado é fechado, cada $\ker(T_\lambda^k)$ é um subespaço próprio fechado de $\ker(T_\lambda^{k+1})$, para todo k inteiro positivo. Pelo Lema de Riesz, podemos tomar uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde $x_n \in \ker(T_\lambda^n)$,

$\|x_n\| = 1$ e $\|x_n - y\| \geq \frac{1}{2}$ para todo $y \in \ker(T_\lambda^{n-1})$. Como essa sequência é limitada e T um operador compacto, $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deve admitir uma subsequência convergente. Porém, veja que para quaisquer naturais $n < m$,

$$\begin{aligned}\|Tx_m - Tx_n\| &= \|T_\lambda x_m + \lambda x_m - T_\lambda x_n - \lambda x^n\| \\ &= |\lambda| \|x_m - (-\lambda^{-1}T_\lambda x_m + x_n + \lambda^{-1}T_\lambda x_n)\|.\end{aligned}$$

Como $T_\lambda^m(x_m) = T_\lambda^{m-1}(T_\lambda x_m) = 0$, $T_\lambda x_m \in \ker(T_\lambda^{m-1})$. Analogamente $T_\lambda x_n \in \ker(T_\lambda^{n-1}) \subsetneq \ker(T_\lambda^{m-1})$ e, por construção, $x_n \in \ker(T_\lambda^n) \subsetneq \ker(T_\lambda^{m-1})$. Assim, $(-\lambda^{-1}T_\lambda x_m + x_n + \lambda^{-1}T_\lambda x_n) \in \ker(T_\lambda^{m-1})$. Daí,

$$\|Tx_m - Tx_n\| \geq \frac{|\lambda|}{2}.$$

Então $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não pode ter subsequência convergente. Um absurdo. Ou seja, deve existir p tal que $\ker(T_\lambda^p) = \ker(T_\lambda^{p+1})$.

Sem perda de generalidade assumimos que p é o menor inteiro não negativo que satisfaz essa relação, seja $k \geq 1$ um natural qualquer e tome $x \in \ker(T_\lambda^{p+k})$. Então,

$$T_\lambda^{p+k}x = T_\lambda^p(T_\lambda^k x) = 0 \implies T_\lambda^k x \in \ker(T_\lambda^p) = \ker(T_\lambda^{p+1}).$$

Ou seja, $T^{p+k+1}x = T^{p+1}(T^k x) = 0$ e $x \in \ker(T_\lambda^{p+k+1})$. Portanto,

$$\ker(T_\lambda^{p+k+1}) \subseteq \ker(T_\lambda^{p+k}) \xRightarrow{(1.11)} \ker(T_\lambda^{p+k+1}) = \ker(T_\lambda^{p+k}).$$

Pelo Princípio da Indução Finita, temos que

$$\{0\} = \ker(T_\lambda^0) \subsetneq ... \subsetneq \ker(T_\lambda^p) = \ker(T_\lambda^{p+1}) = ...$$

□

Proposição 1.3.10. *Seja X um espaço normado, $T : X \to X$ um operador linear compacto e $\lambda \neq 0$. Então existe $q \geq 0$ tal que*

$$X = T_\lambda^0(X) \supsetneq ... \supsetneq T_\lambda^q(X) = T_\lambda^{q+1}(X) = ... \tag{1.14}$$

Demonstração. Suponha que não existe $q \geq 0$ tal que $T_\lambda^q(X) = T_\lambda^{p+1}(X)$. Então

$$X = T_\lambda^0(X) \supsetneq T_\lambda(X) \supsetneq T_\lambda^2(X) \supsetneq ... \supsetneq T_\lambda^n(X) \supsetneq ...$$

Como esta é uma sequência de subespaços próprios e fechados (Corolário 1.3.8), pelo Lema de Riesz podemos construir uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde $x_n \in T^n(X)$, $\|x_n\| = 1$ e $\|x_n - y\| \geq \frac{1}{2}$ para todo $y \in T_\lambda^{n+1}(X)$. Daí, para quaisquer naturais $n < m$,

$$\begin{aligned}\|Tx_n - T_m\| &= \|\lambda x_n + T_\lambda x_n - \lambda x_m - T_\lambda x_m\| \\ &= |\lambda|\|x_n - (-\lambda^{-1}T_\lambda x_n + x_m + \lambda^{-1}T_\lambda x_m)\|.\end{aligned}$$

Além disso, sabemos que $T_\lambda x_n \in T_\lambda^{n+1}(X)$, $x_m \in T_\lambda^m(X) \subseteq T_\lambda^{n+1}(X)$ e $T_\lambda x_m \in T^{m+1}(X) \subsetneq T^{n+1}(X)$. Então $(-\lambda^{-1}T_\lambda x_n + x_m + \lambda^{-1}T_\lambda x_m) \in T^{n+1}(X)$ e temos pela construção da sequência que

$$\|Tx_n - Tx_m\| \geq \frac{|\lambda|}{2}.$$

Como o operador é compacto e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada, $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deve admitir uma subsequência convergente. Um absurdo. Ou seja, existe q tal que $T_\lambda^q(X) = T^{q+1}(X)$.

Sem perda de generalidade, suponha que q é o menor inteiro não negativo que satisfaz essa relação. Então temos $X = T_\lambda^0(X) \supsetneq ... \supsetneq T_\lambda^q(X)$. Seja agora, $k \geq 1$ qualquer, então

$$T_\lambda^{q+k}(X) = T_\lambda^k(T_\lambda^q(X)) = T_\lambda^k(T_\lambda^{q+1}(X)) = T_\lambda^{q+k+1}(X).$$

Pelo Princípio da Indução Finita concluímos que

$$X = T_\lambda^0(X) \supsetneq ... \supsetneq T_\lambda^q(X) = T_\lambda^{q+1}(X) = ...$$

□

Temos então que a partir de certo ponto $q \geq 0$ a imagem de T_λ^q se torna um subespaço invariante a T_λ (isto é, um subespaço A do domínio de um operador linear T onde $T(A) \subseteq A$). Similarmente, existe uma potência $p \geq 0$ a partir do qual qualquer quantidade de composições adicionais de T_λ a T_λ^p não afeta o seu núcleo. O teorema seguinte surge como uma forma de consolidar e relacionar ambos esses fatos.

Teorema 1.3.11. *Seja X um espaço normado, $T : X \to X$ um operador linear compacto e $\lambda \neq 0$. Então existe $r \geq 0$ tal que*

$$\begin{aligned}\{0\} = \ker(T_\lambda^0) \subsetneq ... \subsetneq \ker(T_\lambda^r) = \ker(T_\lambda^{r+1}) = ... \\ X = T_\lambda^0(X) \supsetneq ... \supsetneq T_\lambda^r(X) = T_\lambda^{r+1}(X) = ...\end{aligned}$$

Isto é, para um mesmo operador $T : X \to X$ $p = q$ nas Expressões (1.13) e (1.14).

Demonstração. Pelas Proposições 1.3.9 e 1.3.10 temos que existem $p, q \geq 0$ e nos resta provar que $p = q$. Primeiro mostraremos que $p \leq q$, isto é, que $\ker(T_\lambda^{q+1}) = \ker(T_\lambda^q)$. Para isso, basta mostrar que $\ker(T_\lambda^{q+1}) \subseteq \ker(T_\lambda^q)$. Isto é, que $T_\lambda^{q+1}(x) = T_\lambda(T_\lambda^q(x)) = 0 \implies T_\lambda^q(x) = 0$. Equivalentemente, que

$$T_\lambda(x) = 0 \implies x = 0, \qquad \forall x \in T_\lambda^q(X).$$

Suponha que existe $x_1 \in T_\lambda^q(X)$ tal que $T_\lambda(x_1) = 0$ mas $x_1 \neq 0$. Como, $x_1 \in T_\lambda^q(X) = T_\lambda^{q+1}(X)$, existe $x_2 \in T_\lambda^q(X)$ tal que $T_\lambda x_2 = x_1 \neq 0$, ou seja, $x_2 \neq 0$. Prosseguindo recursivamente conseguimos $x_1, x_2, ..., x_p, x_{p+1}$ tais que $x_1 = T_\lambda x_2 = T_\lambda^2 x_3 = ... = T_\lambda^p x_{p+1} \neq 0$ mas

$$T_\lambda(x_1) = T_\lambda^2 x_2 = T_\lambda^3 x_3 = ... = T_\lambda^{p+1} x_{p+1} = 0.$$

Ou seja, $x_{p+1} \in \ker(T_\lambda^{p+1})$ mas $x_{p+1} \notin \ker(T_\lambda^p)$, um absurdo.

Agora nos resta mostrar que $p \geq q$. Para isso, veja que se $q = 0$, então $p \geq q$ automaticamente. Se $q \geq 1$, mostraremos que $\ker(T_\lambda^{q-1}) \subsetneq \ker(T_\lambda^q)$. Da Proposição 1.3.10, temos que

$$T_\lambda^{q-1}(X) \supsetneq T_\lambda^q(X) = T_\lambda^{q+1}(X).$$

Então podemos tomar $y \in T_\lambda^{q-1}(X) \backslash T_\lambda^q(X)$ e existe $x \in X$ tal que $T_\lambda^{q-1} x = y$ e $T_\lambda y \in T_\lambda^q(X) = T_\lambda^{q+1}(X)$. Ou seja, existe $z \in X$ tal que $T_\lambda^{q+1} z = T_\lambda y$. Como $y \notin T_\lambda^q(X)$, $y \neq T_\lambda^q(z)$ e

$$T_\lambda^{q-1}(x - T_\lambda z) = y - T_\lambda^q z \neq 0 \implies x - T_\lambda z \notin \ker(T_\lambda^{q-1})$$

mas $T_\lambda^q(x - T_\lambda z) = T_\lambda y - T_\lambda^{q+1} y = 0$ e $x - T_\lambda z \in \ker(T_\lambda^q)$. Assim, temos que $\ker(T_\lambda^{q-1}) \subsetneq \ker(T_\lambda^q)$ e $p \geq q$. Como já provamos que $q \geq p$, concluímos que $p = q$. □

A conexão entre o que fizemos até agora e o teorema do núcleo e da imagem que nos serviu de motivação, fica clara com o teorema seguinte. Para enunciar esse resultado, lembramos uma notação que utilizaremos mais adiante: Dado um espaço normado X e Y, Z subespaços fechados seus, escrevemos $X = Y \oplus Z$ se dado qualquer $x \in X$, existe um único $y \in Y$ e um único $z \in Z$ tais que $x = y + z$.

Teorema 1.3.12. *Seja X um espaço normado, $T : X \to X$ um operador linear compacto, $\lambda \neq 0$ e r como no teorema 1.3.11. Então podemos escrever X como*

$$X = \ker(T_\lambda^r) \oplus T_\lambda^r(X).$$

Demonstração. Tome r como no Teorema 1.3.11. Temos que $\ker(T_\lambda^r)$ e $T_\lambda^r(X)$ são subespaços fechados e $\ker(T_\lambda^r) \cap T_\lambda^r(X) = \{0\}$, nos resta apenas mostrar que todo $x \in X$ admite uma representação única

$$x = y + z$$

onde $y \in \ker(T_\lambda^r)$ e $z \in T_\lambda^r(X)$. Para isso, tome $x \in X$ fixo, queremos $z_0 \in T_\lambda^r(X)$ tal que

$$T_\lambda^r(x - z_0) = T_\lambda^r x - T_\lambda^r z_0 = 0 \iff T_\lambda^r x = T_\lambda^r z_0.$$

Como $T_\lambda^r(X) = T_\lambda^{2r}(X)$, $T_\lambda^r x \in T_\lambda^{2r}(X)$ e existe $x_0 \in X$ tal que $T_\lambda^{2r} x_0 = T_\lambda^r x$. Tomando $z_0 = T_\lambda^r x_0 \in T_\lambda^r(X)$ temos que $x - z_0 \in \ker(T_\lambda^r)$. Nos resta então mostrar que $(x - z_0, z_0)$ é o único par (y, z) que satisfaz a igualdade $x = y + z$:

Suponha que existe outro vetor z_1 em $T_\lambda^r(X)$ tal que $x - z_1 \in \ker(T_\lambda^r)$ (isto é, que satisfaz $x = y + z$). Então $T_\lambda^r(z_0 - z_1) = 0$ e $z_0 - z_1 \in \ker(T_\lambda^r)$. Mas como $T^r(X)_\lambda$ é um espaço vetorial,

$$z_0 - z_1 \in \ker(T_\lambda^r) \cap T_\lambda^r(X) = \{0\} \implies z_0 - z_1 = 0 \implies z_0 = z_1.$$

Segue então que $x = (x - z_0) + z$ é a única representação para x em $x = y + z$. Como $x \in X$ foi arbitrário, concluímos a demonstração. $\square$

Partindo do estudo de perturbações $\lambda \neq 0$ arbitrárias para a análise de valores espectrais, ilustramos mais uma semelhança entre os espectros de operadores compactos e operadores entre espaços de dimensão finita com o teorema a seguir:

Teorema 1.3.13. *Seja X um espaço de Banach e $T : X \to X$ um operador linear compacto. Então todo valor espectral $\lambda \neq 0$ é um autovalor de T.*

Demonstração. Suponha o contrário, que $\lambda \in \sigma(T) \setminus (\sigma_p(T) \cup \{0\})$. Ou seja, $\lambda \neq 0$ é tal que $\ker(T_\lambda) = \{0\}$. Então

$$\{0\} = \ker(T_\lambda^0) = \ker(T_\lambda).$$

Pelo Teorema 1.3.11, temos que $r = 0$. Ou seja, $T_\lambda(X) = X$. Então T_λ é uma bijeção linear limitada e, pelo Teorema da Aplicação Aberta, T_λ tem inversa contínua. Mas neste caso temos que $\lambda \in \rho(T)$. Um absurdo. $\square$

Observação. *Apesar de o teorema anterior assumir X como um espaço de Banach, essa hipótese não é necessária (c.f. [5] pg.449).*

Capítulo 2

Operadores limitados auto-adjuntos

2.1 Propriedades básicas

2.1.1 Propriedades espectrais de operadores auto-adjuntos

Voltamos nossa atenção agora a uma nova classe de operadores cujas propriedades espectrais são de nosso interesse: Os operadores auto-adjuntos. Para fazer sentido falar destes, precisamos admitir uma noção adicional de estrutura aos nossos espaços, em particular, precisamos de um produto interno. Assim, passamos do estudo de espaços de Banach para espaços de Hilbert.

Primeiro, revisamos algumas noções básicas:

Definição 2.1.1. Sejam $(H_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ e $(H_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ espaços de Hilbert, e $T : H_1 \to H_2$ um operador linear limitado. Então definimos o operador linear $T^* : H_2 \to H_1$ tal que

$$\langle Tx, y \rangle_2 = \langle x, T^* y \rangle_1.$$

Chamamos T^* de *Hilbert-adjunto de* T ou simplesmente de *adjunto de* T.

Observação. *Chamaremos* T^**, como descrito acima, simplesmente de "adjunto de* T*" quando no contexto de um espaço de Hilbert. Caso queiramos nos referir aos operadores adjuntos no sentido de Banach, explicitaremos esse fato. No contexto mais geral de espaços de Banach, onde a existência de um produto interno não foi explicitada, a noção de adjunto que assumimos é, naturalmente, a definição geral para espaços de Banach.*

Segue facilmente da definição que T^* é um operador linear e limitado e, em particular, $\|T\| = \|T^*\|$. A existência do operador adjunto T^* para um operador linear limitado $T : H_1 \to H_2$ arbitrário é não trivial, tal fato pode ser provado através de uma variante do teorema da representação de Riesz (c.f. [5] pg.196).

Teorema 2.1.1 (Representação de Riesz [5])**.** *Seja H um espaço de Hilbert e $\varphi \in H^*$ qualquer, então existe um único vetor $f_\varphi \in H$ tal que*

$$\varphi(x) = \langle x, f_\varphi \rangle, \quad \forall x \in H. \tag{2.1}$$

Enquanto a demonstração em si foge do escopo do nosso trabalho, ela sugere uma certa intuição geométrica interessante acerca da definição do operador adjunto: Podemos pensar em um operador linear e limitado T como definindo $G : H_1 \times H_2 \to \mathbb{K}$ usando $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ de forma que $G(x, y) = \langle Tx, y \rangle_2$. Neste caso G será uma *forma sesquilinear*, isto é, uma função linear na primeira coordenada e conjugado-linear na segunda.

Com isso em mente $T^* : H_2 \to H_1$, o operador adjunto de T, é o operador que define a forma sesquilinear $\tilde{G} : H_1 \times H_2 \to \mathbb{K}$ usando $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ de forma que $\tilde{G}(x, y) = \langle x, T^* y \rangle_1 = G(x, y)$. Informalmente, T^* está "protagonizando o comportamento da coordenada conjugado-linear do produto interno".

Dito isso, é provavelmente mais natural pensar em T^* como o operador que nos permite "passar T para o outro lado" em um produto interno da forma $\langle Tx, y \rangle$, respeitando a Equação (2.1).

Outra coisa que precisamos discutir antes de seguir, é o conceito da ortogonalidade, em particular, uma notação característica de espaços de Hilbert H: Se A é um subconjunto de X escrevemos $A^\perp$ para simbolizar o conjunto de vetores ortogonais à todos os vetores em A. Isto é,

$$A^\perp := \{x \in H : \langle x, a \rangle = 0, \ \forall a \in A\}.$$

Uma discussão da utilidade desta notação e da ortogonalidade em espaços de Hilbert não seria completa sem uma menção do seguinte teorema.

Teorema 2.1.2 (Teorema da Projeção Ortogonal [5])**.** *Sejam H um espaço de Hilbert e A um subespaço fechado de H. Então*

$$H = A \oplus A^\perp.$$

A conexão entre os conjuntos de vetores ortogonais e espaços fechados é importante na manipulação de conjuntos da forma $A^\perp$ e pode ser vista pelo teorema anterior. Para facilitar o nosso trabalho, provamos um lema adicional antes de chegarmos à teoria espectral em si.

Lema 2.1.3. *Seja H um espaço de Hilbert e $A \subseteq H$ um subespaço qualquer. Então*

$$\overline{A} = (A^\perp)^\perp = A^{\perp\perp}.$$

Demonstração. Se $x \in A^\perp$, então $\langle a, x\rangle = 0$ para todo $a \in A$. Ou seja, $A \subseteq A^{\perp\perp}$. Se $a_0 \in H$ e é tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = a_0$ para $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$, então

$$\langle a_0, x\rangle = \langle \lim_{n\to\infty} a_n, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle a_n, x\rangle = 0, \qquad \forall x \in A^\perp.$$

Com isso, temos $\overline{A} \subseteq A^{\perp\perp}$. Agora, como uma consequência do Teorema da Projeção Ortogonal, já que $\overline{A}$ é fechado, $(\overline{A})^{\perp\perp} = \overline{A}$. Por fim, basta ver que como $A \subseteq \overline{A}$, então $A^\perp \supseteq \overline{A}^\perp$ e $A^{\perp\perp} \subseteq (\overline{A})^{\perp\perp} = \overline{A}$. □

Agora, definimos a classe de operadores que protagonizará o restante das nossas discussões:

Definição 2.1.2 (Operador auto-adjunto)**.** Chamamos um operador linear e limitado $T : H \to H$ de auto-adjunto se ele coincide com o seu adjunto, isto é,

$$T = T^*.$$

Observação. *Definimos o adjunto de um operador $T : H_1 \to H_2$, entre espaços de Hilbert, especificamente para operadores T lineares e limitados. Durante esse capítulo nos restringiremos a esse caso, mas futuramente voltaremos nossa atenção a como esse conceito pode ser estendido para operadores ilimitados e trataremos de um caso mais geral.*

No remanescente desta subseção estudaremos principalmente como o espectro se dispõe em $\mathbb{C}$ como um conjunto e um pouco de como operadores T_λ se comportam quando T é um operador limitado e auto-adjunto. O primeiro resultado que veremos, apesar de básico, é particularmente representativo de ambos esses aspectos.

Proposição 2.1.4. *Se H é um espaço de Hilbert complexo e $T : H \to H$ é um operador linear limitado e auto-adjunto, então $\sigma_p(T) \subseteq \mathbb{R}$. E, se $v_1, v_2 \in H$ são autovetores associados a autovalores distintos, $\langle v_1, v_2\rangle = 0$.*

Demonstração. Seja $\lambda \in \sigma_p(T)$, então existe $x \in H$ não-nulo tal que $Tx = \lambda x$. Como T é auto-adjunto,

$$\langle \lambda x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \langle x, \lambda x\rangle.$$

Como $\langle x, x\rangle > 0$,

$$\lambda\langle x, x\rangle = \overline{\lambda}\langle x, x\rangle \implies \lambda = \overline{\lambda} \implies \lambda \in \mathbb{R}.$$

Agora, sejam v_1 e v_2 vetores tais que $Tv_1 = \lambda_1 v_1$ e $Tv_2 = \lambda_2 v_2$, para $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Sem perda de generalidade podemos assumir que $\lambda_1 \neq 0$ e teremos:

$$\langle v_1, v_2\rangle = \frac{1}{\lambda_1}\langle Tv_1, v_2\rangle = \frac{1}{\lambda_1}\langle v_1, Tv_2\rangle = \frac{\overline{\lambda_2}}{\lambda_1}\langle v_1, v_2\rangle.$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \overline{\lambda_2}$, $\frac{\overline{\lambda_2}}{\lambda_1} \neq 1$, ou seja, $\langle v_1, v_2\rangle = 0$.

□

Com isso, temos que os autoespaços de autovalores de um operador T limitado e auto-adjunto, quando existem, são ortogonais entre si (quaisquer dois vetores de um auto-espaços diferentes são ortogonais) e que o operador T apenas os expande ou contrai (os escala por um valor λ real).

No caso do teorema anterior podemos dizer que $\ker(T_{\lambda_1}) \subseteq (\ker(T_{\lambda_2}))^\perp$ ou simplesmente escrever $\ker(T_{\lambda_1}) \perp \ker(T_{\lambda_2})$.

Para o próximo resultado, usaremos também a seguinte notação:

Definição 2.1.3. Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ um operador linear. Dizemos que T é *limitado inferiormente* se existe $m > 0$ tal que

$$\|Tx\| \geq m\|x\|, \qquad \forall x \in X.$$

Teorema 2.1.5. *Se H é um espaço de Hilbert complexo e $T : H \to H$ é um operador linear limitado e auto-adjunto,*

$$\lambda \in \rho(T) \iff T_\lambda \text{ é limitado inferiormente.}$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $T : H \to H$ é um operador linear limitado e auto-adjunto e $\lambda \in \rho(T)$, $T_\lambda : H \to H$ é limitado e admite uma inversa $R_\lambda : H \to H$ limitada. Ou seja, T_λ é um isomorfismo de H em H e temos que existe $m, M > 0$ tais que

$$m\|x\| \leq \|T_\lambda x\| \leq M\|x\|.$$

Ou seja, T_λ é limitado inferiormente.

($\Leftarrow$) Agora, suponha que $T : H \to H$ é um operador auto-adjunto, $\lambda \in \mathbb{C}$ e que existe $m > 0$ tal que $m\|x\| \leq \|T_\lambda x\|$

É claro que T_λ é injetora, já que

$$T_\lambda x = 0 \implies 0 \leq m\|x\| \leq 0 \implies x = 0.$$

Tome agora $x_0 \in H$ tal que $\langle x_0, T_\lambda x\rangle = 0$ para todo $x \in H$. Como T_λ é auto-adjunto, para todo $x \in H$:

$$0 = \langle x_0, Tx - \lambda x\rangle = \langle x_0, Tx\rangle - \langle x_0, \lambda x\rangle = \langle Tx_0, x\rangle - \langle \overline{\lambda} x_0, x\rangle$$

e então $\langle T_{\overline{\lambda}} x_0, x\rangle = 0$ para todo $x \in H$. Ou seja, $T_\lambda x_0 = 0 \implies x_0 = 0$. Daí temos que $T_\lambda(H)^\perp = \{0\}$ e consequentemente $\overline{T_\lambda(H)} = T_\lambda(H)^{\perp\perp} = H$ (Teorema 2.1.2 e Lema 2.1.3) e $T_\lambda(H)$ é denso em H.

Por fim, basta ver que já que T_λ é injetora, $R_\lambda = T_\lambda^{-1}$ existe e como T_λ é limitado inferiormente,

$$m\|R_\lambda x\| \leq \|T_\lambda(R_\lambda x)\|, \quad \forall x \in H \implies \|R_\lambda x\| \leq \frac{1}{m}\|x\|, \quad \forall x \in H.$$

Ou seja, R_λ existe e é um operador limitado com domínio denso, segue que

$$\lambda \notin \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T) \implies \lambda \in \rho(T).$$

$\square$

Com essa caracterização do conjunto resolvente de operadores limitados e auto-adjuntos, voltamos nossa atenção agora para estudar como podemos restringir o espectro de T. A primeira coisa que verificaremos é que a afirmação da Proposição 2.1.4 sobre o espectro pontual de T pode ser generalizada para o espectro inteiro.

Teorema 2.1.6. *Se H é um espaço de Hilbert complexo e $T : H \to H$ é um operador linear auto-adjunto, seu espectro $\sigma(T)$ consiste apenas de valores reais.*

Demonstração. Com T auto-adjunto e $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ temos que

$$\langle T_\lambda x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle - \lambda\langle x, x\rangle$$

e

$$\overline{\langle T_\lambda x, x\rangle} = \langle x, Tx\rangle + \langle x, -\lambda x\rangle = \langle Tx, x\rangle - \overline{\lambda}\langle x, x\rangle.$$

Assim, considerando $\mathrm{Im}(a+ib) := b$ para qualquer $a + ib \in \mathbb{C}$,

$$2i\mathrm{Im}(\langle T_\lambda x, x\rangle) = \langle T_\lambda x, x\rangle - \overline{\langle T_\lambda x, x\rangle} = (\overline{\lambda} - \lambda)\langle x, x\rangle = -2ib\|x\|^2.$$

Daí, como $|\mathrm{Im}(\langle T_\lambda x, x\rangle)| \leq |\langle T_\lambda x, x\rangle| \leq \|T_\lambda x\|\|x\|$, temos

$$2\|T_\lambda x\|\|x\| \geq 2|\mathrm{Im}(\langle T_\lambda x, x\rangle)| \geq 2|b|\|x\|^2 \implies \|T_\lambda x\| \geq |b|\|x\|.$$

Por fim, se $b \neq 0$, temos que T_λ é limitada inferiormente e, pelo Teorema 2.1.5, $\lambda \in \rho(T)$. Ou seja, $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$. □

A caracterização de um operador como auto-adjunto nos permite inferir ainda mais sobre o seu espectro. Em particular, conseguimos uma limitação ainda mais precisa que o raio espectral. Primeiro, veja que, com T auto-adjunto,

$$\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle} \implies \langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}.$$

Como vimos, quando trabalhando com operadores limitados auto-adjuntos, é muito útil considerar manipulações da expressão $\langle Tx, x\rangle$. Além de ser o cenário ideal para usar o fato de T ser auto-adjunto, em espaços de Hilbert complexos, essa contas trazem implicações diretas para o operador T como é o exemplificado a seguir:

Teorema 2.1.7. *Se $H \neq \{0\}$ é um espaço de Hilbert complexo e $T : H \to H$ é um operador linear limitado e auto-adjunto, então $\sigma(T) \subseteq [m, M]$ onde*

$$m = \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle \quad e \quad M = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle.$$

Demonstração. Com T auto-adjunto e $H \neq \{0\}$, m está bem definido. Para verificar o mesmo para M basta ver que $\langle Tx, x\rangle \leq \|T\|\|x\|^2$, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz. Além disso,

$$\langle Tx, x\rangle = \left\langle T\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle \|x\|^2 \leq M\|x\|^2.$$

Note que esta só é possível pois $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ para todo $x \in H$, assim podemos considerar o supremo desses valores. Agora, tome $\lambda = M + c$ onde $c > 0$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e pelo fato que λI também é auto-adjunto, temos

$$\begin{aligned}\|T_\lambda x\|\|x\| &\geq \langle -T_\lambda x, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle - \langle Tx, x\rangle \\ &\geq (\lambda - M)\|x\|^2 \implies \|T_\lambda x\| \geq c\|x\|\end{aligned}$$

Novamente, com $c > 0$ temos que $\lambda = M + c \in \rho(T)$. Analogamente, tome $\lambda = m - c$. Podemos verificar que

$$\langle Tx, x\rangle = \left\langle T\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle \|x\|^2 \geq m\|x\|^2.$$

e

$$\|T_\lambda x\|\|x\| \geq \langle Tx, x\rangle - \lambda\langle x, x\rangle \geq (m - \lambda)\|x\|^2 = c\|x\|^2$$

Ou seja, para $c > 0$ temos que $\lambda \in \rho(T)$. Com isso concluímos que, de fato, $\sigma(T) \subseteq [m, M]$. □

Até então este tem sido o maior avanço que conseguimos sobre o espectro de um classe inteira de operadores, neste caso os operadores limitados e auto-adjuntos. Não apenas confinamos $\sigma(T)$ à reta real mas a um intervalo limitado. No entanto, ainda podemos alcançar conclusões mais fortes, seguimos em direção a estas.

Lema 2.1.8. *Se $H \neq \{0\}$ é um espaço de Hilbert e $T : H \to H$ um operador linear limitado e auto-adjunto,*

$$\|T\| = \max\{|m|, M\} = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|.$$

Para m e M as constantes definidas no Teorema 2.1.7.

Demonstração. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que

$$\sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle| \leq \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|\|x\| = \|T\| \sup_{\|x\|=1} \|x\| = \|T\|.$$

Nos resta então mostrar que $\|T\| \geq \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|$. Se $\ker(T) = H$, então $\|T\| = 0 = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|$.

Agora, com $\ker(T) \neq H$, veja que para todo $x \notin \ker(T)$, $\exists y = \frac{Tx}{\|Tx\|} \in H$ tal que

$$\|Tx\| = \frac{\|Tx\|^2}{\|Tx\|} = \frac{1}{\|Tx\|}\langle Tx, Tx\rangle = \langle Tx, y\rangle.$$

Como $\langle Tx, y\rangle \in \mathbb{R}$ e T é auto-adjunto, $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \langle Ty, x\rangle$. Com isso:

$$\begin{aligned}
\|Tx\| = \langle Tx, y\rangle &= \frac{\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle + \langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle}{4} \\
&= \frac{\langle Tx, y\rangle + (\langle Tx, x\rangle - \langle Tx, x\rangle) + \langle Ty, x\rangle + \langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle}{4} \\
&= \frac{\langle Tx, x+y\rangle + \langle Ty, x\rangle - \langle Tx, x-y\rangle + \langle Ty, x\rangle}{4} \\
&= \frac{\langle Tx, x+y\rangle + \langle Ty, x\rangle + (\langle Ty, y\rangle - \langle Ty, y\rangle) - \langle Tx, x-y\rangle + \langle Ty, x\rangle}{4} \\
&= \frac{\langle Tx, x+y\rangle + \langle Ty, x+y\rangle - \langle Tx, x-y\rangle + \langle Ty, x-y\rangle}{4} \\
&= \frac{\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle}{4}.
\end{aligned}$$

Daí:

$$\begin{aligned}
\|Tx\| &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2\langle Tv, v\rangle + \|x-y\|^2\langle Tw, w\rangle\right), \qquad \text{para } \|v\| = \|w\| = 1 \\
&\leq \frac{\sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|}{4}(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) \\
&= \frac{\sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|}{4}(2\|x\|^2 + 2\|y\|^2) \leq \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|.
\end{aligned}$$

Por fim, como a escolha de $\|x\| = 1$ foi arbitrária, temos que

$$\|T\| \leq \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle| \ \text{ e consequentemente } \ \|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|.$$

□

Com este lema, a seguir confirmamos que $[m, M]$ é o menor intervalo real contendo $\sigma(T)$.

Teorema 2.1.9. *Sejam $H \neq \{0\}$ um espaço de Hilbert complexo, $T : H \to H$ um operador linear limitado e auto-adjunto e m e M as constantes definidas no Teorema 2.1.7. Então m e M são valores espectrais.*

Demonstração. Primeiro, veja que pelo Teorema 1.2.6 com $p(\lambda) = \lambda + \|T\|$,

$$\begin{aligned}
\lambda \in \sigma(T) &\iff p(\lambda) \in p(\sigma(T)) \\
&\iff p(\lambda) \in \sigma(p(T)) \\
&\iff \lambda + \|T\| \in \sigma(T + \|T\|I).
\end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.1.7, definindo $m = \inf_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle$ e $M = \sup_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle$, temos:

$$\sigma(p(T)) \subseteq [m + \|T\|, M + \|T\|].$$

Em particular, tomando $S = p(T)$ vemos que

$$\begin{aligned} m_S &= \inf_{\|x\|=1}\langle Sx, x\rangle = \inf_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle + \langle \|T\|x, x\rangle = m + \|T\| \\ M_S &= \sup_{\|x\|=1}\langle Sx, x\rangle = \sup_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle + \langle \|T\|x, x\rangle = M + \|T\|. \end{aligned}$$

Assim, basta provar que $M_S \in \sigma(S)$ e teremos que $M \in \sigma(T)$. A vantagem dessa abordagem é que temos que $0 \leq m_S \leq M_S$ e portanto $\|S\| = M_s$. Com isso, podemos tomar $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $\|x_n\| = 1$ e $M_S - \langle Sx_n, x_n\rangle = \delta_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ com $\delta_n \to 0$. Daí,

$$\begin{aligned} \|(S - M_S I)x_n\|^2 &= \langle Sx_n - M_S x_n, Sx_n - M_S x_n\rangle \\ &= \|Sx_n\|^2 - 2M_S\langle Sx_n, x_n\rangle + M_S^2\|x_n\|^2 \\ &\leq \underbrace{\|S\|^2}_{M_S^2} - 2M_S(M_S - \delta_n) + M_S^2 = 2M_S\delta_n. \end{aligned}$$

Assim, $\lim_{n\to\infty} \|(S - M_S I)x_n\| = 0$ e não pode existir $c > 0$ tal que

$$\|(S - M_S I)x_n\| \geq c\|x_n\| = c, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pelo Teorema 2.1.5, $M_S \in \sigma(S)$ e portanto $M \in \sigma(T)$.

A demonstração remanescente é análoga: Definindo $Q = T - \|T\|$ podemos verificar que

$$\begin{aligned} m_Q &= \inf_{\|x\|=1}\langle Qx, x\rangle = \inf_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle - \langle \|T\|x, x\rangle = m - \|T\| \\ M_Q &= \sup_{\|x\|=1}\langle Qx, x\rangle = \sup_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle - \langle \|T\|x, x\rangle = M - \|T\|. \end{aligned}$$

E temos que $m_Q \leq M_Q \leq 0$ e $\|T\| = |m_Q|$. Tomando $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $\|x_n\| = 1$ e $\langle Qx_n, x_n\rangle - m_Q = \delta_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ com $\delta_n \to 0$ verificamos que

$$\begin{aligned} \|(Q - m_Q I)x_n\|^2 &= \langle Qx_n - m_Q x_n, Qx_n - m_Q x_n\rangle \\ &= \|Qx_n\|^2 - 2m_Q\langle Qx_n, x_n\rangle + m_Q^2\|x_n\|^2\rangle \\ &\leq \underbrace{\|Q\|^2}_{|m_Q|^2} - 2m_Q(m_Q + \delta_n) + m_Q^2 = 2|m_Q|\delta_n. \end{aligned}$$

Assim, $\lim_{n\to\infty} \|(Q - m_Q I)x_n\| = 0$ e Q não pode ser limitado inferiormente. Pelo Teorema 2.1.5, $m_Q \in \sigma(Q)$ e então, $m \in \sigma(T)$.

$\square$

Na introdução do espectro discutimos brevemente o motivo por trás da sua divisão em espectro pontual, contínuo e residual. Enquanto a motivação geral é de contabilizar as distintas formas que perturbações $-\lambda I$ afetam operadores lineares entre espaços de dimensão infinita, a forma como definimos os espectros contínuos e residual é um tanto particular. A estrutura adicional garantida aos operadores auto-adjuntos ajuda a elucidar essa escolha, como veremos a seguir estes operadores conseguem evitar um desses tipos de "anomalias" que $-\lambda I$ pode causar.

Teorema 2.1.10. *Seja H um espaço de Hilbert complexo e $T : H \to H$ um operador linear limitado e auto-adjunto, então $\sigma_r(T) = \emptyset$.*

Demonstração. Suponha que $\lambda \in \sigma_r(T)$. Então $\overline{T_\lambda(H)} \neq H$. Pelo Teorema da Projeção Ortogonal, $(\overline{T_\lambda(H)})^\perp \neq \{0\}$. Então existe $y \neq 0$ tal que

$$y \in (\overline{T_\lambda(H)})^\perp \subseteq (T_\lambda(H))^\perp$$

com $\langle T_\lambda x, y\rangle = 0$ para todo $x \in H$. Como T é auto-adjunto e $\lambda \in \mathbb{R}$ (Teorema 2.1.6), $-\lambda I$ e portanto T_λ são operadores lineares limitados auto-adjuntos. Com isso temos:

$$\begin{aligned}\langle x, T_\lambda y\rangle &= \langle x, Ty\rangle - \langle x, \lambda y\rangle = \langle Tx, y\rangle - \langle \lambda x, y\rangle \\ &= \langle Tx - \lambda x, y\rangle = \langle T_\lambda x, y\rangle = 0 \qquad \forall x \in H.\end{aligned}$$

Então $\|T_\lambda y\|^2 = 0 \implies T_\lambda y = 0 \implies \lambda \in \sigma_p(T)$. Um absurdo. Ou seja, o espectro residual de T é vazio. $\square$

2.1.2 Projeções ortogonais

Em espaços de Banach X, *projeções* são operadores a lineares $P : X \to X$ idempotentes, isto é, tais que:

$$P(P(x)) = P(x), \qquad \forall x \in X.$$

Projeções limitadas nos permitem decompor o espaço com uma soma direta $X = P(X) \oplus \ker(P)$ de forma que $x = P(x) + (I - P)(x)$ para todo $x \in X$.

Para um espaço de Hilbert H, nós temos o conceito adicional de *projeções ortogonais*, projeções limitadas $P : H \to H$ tais que $\ker(P) = P(H)^{\perp}$. A ortogonalidade da decomposição de H traz diversas vantagens que exploraremos adiante.

Quando estivermos determinando se uma projeção é ortogonal, para evitarmos ter que mudar nosso foco do operador P aos subespaços $P(H)$ e $\ker(P)$ para analisar a sua ortogonalidade, usaremos em geral a seguinte caracterização equivalente de projeções ortogonais:

Teorema 2.1.11. *Seja H um espaço de Hilbert e $P : H \to H$ um operador linear limitado, P é uma projeção ortogonal se, e somente se, P for auto-adjunto e idempotente.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que $P : H \to H$ é uma projeção ortogonal. Por definição P é uma projeção e portanto idempotente. Como sabemos, P nos permite decompor o espaço como $x = P(x) + (I - P)(x)$ onde $P(H) \perp (I - P)(H)$. Tomando $x, y \in H$ quaisquer,

$$\begin{aligned}\langle P(x), y\rangle &= \langle P(x), P(y) + (I-P)(y)\rangle = \langle P(x), P(y)\rangle + \underbrace{\langle P(x), (I-P)(y)\rangle}_{0} \\ &= \langle P(x), P(y)\rangle = \langle P(x), P(y)\rangle + \underbrace{\langle (I-P)(x), P(y)\rangle}_{0} = \langle x, P(y)\rangle.\end{aligned}$$

Ou seja, P é auto-adjunto.

($\Leftarrow$) Suponha agora que $P : H \to H$ é uma projeção limitada e auto-adjunta. Tome $P(x) \in P(H)$ e $(I - P)(y) \in (I - P)(H)$ quaisquer. Então

$$\langle P(x), (I-P)(y)\rangle = \langle x, P(I-P)(y)\rangle = \langle x, P(y) - P^2(y)\rangle = \langle x, 0\rangle = 0.$$

Como a escolha de vetores em $P(H)$ e $(I - P)(H)$ foi arbitrária, temos que $P(H) \perp (I - P)(H)$, ou seja, P é uma projeção ortogonal. $\square$

Na seção anterior vimos que o valor $\langle Tx, x\rangle$ é prevalente no estudo operadores auto-adjuntos. Em particular, para operadores auto-adjuntos este é sempre um valor real, o que nos permite aproveitar a ordem $\leq$ de $\mathbb{R}$ para definir uma ordem parcial[1] $\leq$ no conjunto de operadores auto-adjuntos:

[1] Omitimos a verificação de que esta é, de fato, uma ordem parcial.

Sejam H um espaço de Hilbert complexo, $T_1 : H \to H$ e $T_2 : H \to H$ operadores lineares limitados e auto-adjuntos. Definimos $\leq$ (no conjunto de operadores limitados e auto-adjuntos de H a H) pela seguinte relação:

$$T_1 \leq T_2 \iff \langle T_1 x, x\rangle \leq \langle T_2 x, x\rangle, \qquad \forall x \in H.$$

Dizemos ainda que T_1 é um *operador positivo* se $T_1 \geq 0$. Informalmente, consideramos $T_1 \leq T_2$ se T_2 "consistentemente mantém um alinhamento maior com o espaço" que T_1. Algumas propriedades imediatas são:

- $0 \leq T_1 \leq T_2 \implies 0 \leq T_2$,
- $T_1 \leq T_2 \iff 0 \leq T_2 - T_1$,
- $0 \leq T_1, T_2 \implies 0 \leq T_1 + T_2$.

Sabendo agora que as projeções ortogonais são operadores auto-adjuntos, podemos ordená-las. Em particular, para uma projeção ortogonal $P : H \to H$ temos que

$$\langle Px, x\rangle = \langle P^2(x), x\rangle = \langle Px, Px\rangle = \|Px\|^2.$$

Ou seja, as projeções ortogonais são operadores positivos. Uma vez que $\|Px\|^2 = \langle Px, x\rangle \leq \|Px\|\|x\|$, temos que $\|P\| \leq 1$. E, como $P|_{P(H)} = I|_{P(H)}$, se $P(H) \neq \{0\}$, então $\|P\| = 1$. Com isso, para qualquer $P : H \to H$ projeção ortogonal,

$$\langle Px, x\rangle \leq \|Px\|\|x\| \leq \|x\|^2 = \langle Ix, x\rangle \implies 0 \leq P \leq I.$$

Motivados pelo Teorema Espectral em espaços de dimensão finita (c.f. Teorema **??**), buscamos uma familiaridade maior com as diferentes formas de combinar projeções ortogonais. Em particular, neste momento exploraremos algumas condições sobre as quais podemos combinar projeções sem que deixem de ser projeções ortogonais, e como isso afeta o espaço que representam.

Teorema 2.1.12. *Sejam H um espaço de Hilbert e $P_1 : H \to H$ e $P_2 : H \to H$ projeções ortogonais. Então P_1P_2 é uma projeção ortogonal se, e somente se, P_1 e P_2 comutam. E, se P_1P_2 é uma projeção, projeta H no subespaço $P_1(H) \cap P_2(H)$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se P_1P_2 é uma projeção ortogonal, para qualquer $x \in H$,

$$\langle P_1P_2x, y\rangle = \langle P_2x, P_1y\rangle = \langle x, P_2P_1y\rangle.$$

Como P_1P_2 é um operador auto-adjunto, $P_1P_2 = P_2P_1$.
($\Leftarrow$) Se P_1 e P_2 são projeções ortogonais que comutam,

$$(P_1P_2)^2(x) = P_1P_2P_1P_2(x) = \underbrace{P_1P_1}_{P_1}\underbrace{P_2P_2}_{P_2}(x) = P_1P_2(x), \qquad \forall x \in H,$$

e P_1P_2 é idempotente. Segue de que P_1 e P_2 ambos são auto-adjuntos e comutam que, para quaisquer $x, y \in H$

$$\langle P_1P_2x, y\rangle = \langle P_2x, P_1y\rangle = \langle x, P_2P_1y\rangle = \langle x, P_1P_2y\rangle.$$

Portanto, P_1P_2 é um operador auto-adjunto e, pelo Teorema 2.1.11, P_1P_2 é uma projeção ortogonal. $\square$

Corolário 2.1.13. *Sejam H um espaço de Hilbert, P_1 e P_2 projeções ortogonais com imagens M e N, respectivamente. Então M e N são ortogonais se, e somente se, $P_1P_2 = 0$.*

Teorema 2.1.14. *Sejam H um espaço de Hilbert e $P_1 : H \to H$ e $P_2 : H \to H$ projeções ortogonais sobre H. Então $P_1 + P_2$ é uma projeção ortogonal se, e somente se, P_1 e P_2 forem ortogonais entre si. Isto é, se, e somente se, $P_1(H)$ e $P_2(H)$ são subespaços ortogonais. E, se $P_1 + P_2$ for uma projeção ortogonal projeta H em $P_1(H) \oplus P_2(H)$.*

Para finalizar a nossa reflexão sobre as interações básicas entre projeções ortogonais, apresentamos um resultado que nos dá várias formas equivalentes de pensarmos em como ordenar projeções e suas implicações.

Teorema 2.1.15. *Sejam H um espaço de Hilbert e $P_1 : H \to H$ e $P_2 : H \to H$ projeções ortogonais. São equivalentes:*

1. $P_1 \leq P_2$.

2. $P_1(H) \subseteq P_2(H)$.

3. $\ker(P_2) \subseteq \ker(P_1)$.

Teorema 2.1.16. *Se H é um espaço de Hilbert e $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência monotonamente crescente de projeções ortogonais $P_n : H \to H$ para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$P_1 \leq P_2 \leq P_3 \leq .... \leq P_n \leq ...,$$

então $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente fortemente? para uma projeção $P : H \to H$ que projeta H em $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n}$ com núcleo $\bigcap_{n=1}^{\infty} \ker(P_n)$. Onde $Y_n = P_n(H)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Uma vez que toda projeção P é tal que $P \leq I$, temos que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência monotonamente crescente e limitada

$$P_1 \leq P_2 \leq P_3 \leq .... \leq P_n \leq ... \leq I$$

e, portanto, converge pontualmente a um operador positivo $P : H \to H$. Para ver que $P(H) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n}$ basta ver que $Px = \lim_{n\to\infty} P_n x = x$ para todo $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ e que P é contínuo para conseguirmos $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n} \subseteq P(H)$. Acho que dessa forma não dá certo, eu teria que primeiro provar que $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n}$é complementado por $\bigcap_{n=1}^{\infty} \ker(P_n)$ pra mostrar que P realmente coincide com $I|_{P(H)} \oplus 0|_{\bigcap_{n=1}^{\infty} \ker(P_n)}$. □

Teorema 2.1.17. *Se H é um espaço de Hilbert e $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de projeções ortogonais tais que $P_n(H) \perp P_m(H)$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$ é uma projeção ortogonal[2] sobre $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(H)}$ com núcleo $\bigcap_{n=1}^{\infty} \ker(P_n)$.*

Demonstração. Como as projeções P_n são 2-a-2 ortogonais, as somas parciais $S_k = \sum_{n=1}^{k} P_n$ são projeções ortogonais sobre $\bigcup_{n=1}^{k} P_n(H)$ com núcleo $\bigcap_{n=1}^{k} \ker(P_n)$. Tomando $p, q \in \mathbb{N}$ com $p < q$ temos que

$$\bigcup_{n=1}^{p} P_n(H) \subseteq \bigcup_{n=1}^{q} P_n(H) \implies S_p \leq S_q.$$

Ou seja $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência monotonamente crescente de projeções ortogonais. Pelo teorema 2.1.16 temos que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente a uma projeção ortogonal S tal que

$$Sx = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} P_n(x)$$

com imagem $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(H)}$ e núcleo $\bigcap_{n=1}^{\infty} \ker(P_n)$. □

[2] Considerando a convergência forte da série. Isto é, $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$ é o operador definido por $\sum_{n=1}^{\infty} P_n = \text{s-}\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} P_n$.

2.2 O Teorema Espectral

Em espaços de Hilbert H de dimensão $n < +\infty$, se $T : H \to H$ é um operador linear auto-adjunto com autovalores distintos $\lambda_1, ..., \lambda_n$ (e autovetores $x_1, ..., x_n$ na esfera unitária, respectivamente). Temos que esses autovetores são vetores ortogonais (teorema **??**) e não-nulos, formando assim uma base de H. Podemos assim reescrever:

$$Tx = T\left(\sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k\rangle x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k\rangle T(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, x_k\rangle x_k.$$

Chamando de P_k os operadores $P_k(x) = \langle x, x_k\rangle x_k$ é fácil ver que são projeções ortogonais de H aos subespaços $\text{span}\{x_k\}$, respectivamente. Nos permitindo assim decompor a transformação T como uma combinação de n formas $\lambda_1, ..., \lambda_n$ de escalar subespaços ortogonais:

$$T = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k.$$

Nesta seção procuramos uma forma semelhante de decompor um operador linear limitado e auto-adjunto $T : H \to H$ entre espaços de Hilbert complexos de dimensão infinita. O nosso primeiro passo será achar um paralelo à seleção de finitas projeções $P_1, ..., P_n$ para um espaço de dimensão infinita (inspirando a definição da medida espectral discutida a seguir). Em seguida desenvolveremos uma forma de combinar o efeito de T sobre esses subespaços distintos. Por fim, usaremos essas ferramentas para conseguir uma decomposição favorável de T e discutiremos variações desse resultado.

2.2.1 A medida espectral

Uma medida μ é uma ferramenta que nos permite "contabilizar continuamente" uma noção de magnitude sobre um conjunto qualquer (por exemplo, em intervalos reais). Nesta seção buscamos aproveitar o maquinário de teoria da medida para definir uma forma de "contabilizar continuamente" projeções ortogonais. Para este fim, chamaremos de $\text{Proj}(H)$ o conjunto de projeções ortogonais $P : H \to H$, onde H é um espaço de Hilbert.

No teorema seguinte veremos que considerar H um espaço de Hilbert complexo tem vantagens mesmo se não estamos considerando o espectro de operadores. Em particular, usaremos que em um espaço de Hilbert complexo

$$\langle Tx, x\rangle = \langle Sx, x\rangle \quad \forall x \in H \iff T = S. \tag{2.2}$$

O sentido ($\Leftarrow$) é imediato. Para ($\Rightarrow$) usamos que $T - S$ é um operador tal que $\langle (T-S)x, x\rangle = 0$ para todo $x \in H$:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (T-S)(x+\alpha y), (x+\alpha y)\rangle \\ &= \cancel{\langle (T-S)x, x\rangle} + \overline{\alpha}\langle (T-S)x, y\rangle + \alpha\langle (T-S)y, x\rangle + \cancel{\langle (T-S)(\alpha y), (\alpha y)\rangle} \\ &= \overline{\alpha}\langle (T-S)x, y\rangle + \alpha\langle (T-S)y, x\rangle \end{aligned}$$

Considerando $\alpha = 1$ e $\alpha = -i$ temos que

$$\langle (T-S)x, y\rangle + \langle (T-S)y, x\rangle = 0 \qquad e \qquad \langle (T-S)x, y\rangle - \langle (T-S)y, x\rangle = 0$$

Ou seja $\langle (T-S)x, y\rangle = 0$ para quaisquer $x, y \in H$. Tomando $y = (T-S)x$ temos que $(T-S)x = 0$ para qualquer escolha de $x \in H$, e $T = S$.

No contexto de um espaço de Hilbert complexo[3] discutiremos o conceito que motiva essa seção:

Definição 2.2.1 (Medida Espectral)**.** Seja $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de um conjunto Ω e H um espaço de Hilbert. Uma função $E : \mathcal{A} \to \operatorname{Proj}(H)$ é chamada de medida espectral se:

1. $E(\Omega) = I$,
2. E for σ-aditiva. Isto é, se, para qualquer escolha de conjuntos $(M_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ 2-a-2 disjuntos:

$$E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} E(M_n)(x), \qquad \forall x \in H.$$

Observação. *No contexto de uma medida espectral E, a sua σ-aditividade é relativa à topologia forte. Assim, escreveremos*

$$E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E(M_n) := \operatorname*{s-lim}_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} E(M_n).$$

[3]Para a definição de medida espectral assim como alguns teoremas e propriedades sobre as medidas espectrais, não é necessária a hipótese de H ser um espaço de Hilbert *complexo*. Deixamos à caráter do leitor discernir para quais casos a complexidade é necessária.

Onde s-$\lim_{n\to\infty} f_n$*, para uma sequência* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de funções* $f_n : A \to B$ *quaisquer, é a função* $f : A \to B$ *definida por* $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *para todo* $x \in A$*.*

Similarmente à medidas comuns, $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$, uma medida espectral E define uma forma de avaliar cada conjunto da "subdivisão" $\mathcal{A}$ de um conjunto Ω. Em particular, E atribui à cada um desses uma projeção ortogonal de forma a distribuir projeções relativas à todo o espaço H, isto é, $E(\Omega) = I$. Para entendermos melhor como essa "distribuição" ocorre, desenvolveremos algumas propriedades iniciais:

Teorema 2.2.1. *Seja* $\mathcal{A}$ *uma* σ*-álgebra sobre um conjunto* Ω*,* H *um espaço de Hilbert complexo e* $E : \mathcal{A} \to \mathrm{Proj}(H)$ *uma medida espectral. Temos que:*

I. $E(\emptyset) = 0$*, onde* 0 *é o operador nulo.*

II. E *é finitamente aditiva. Isto é, se* $M_1, ..., M_k \in \mathcal{A}$ *são conjuntos 2-a-2 disjuntos, para* $k \in \mathbb{N}$*. Então*

$$E\left(\bigcup_{n=1}^{k} M_n\right) = \sum_{n=1}^{k} E(M_n).$$

III. Para $M_1, M_2 \in \mathcal{A}$*,* $M_1 \subseteq M_2 \implies E(M_1) \leq E(M_2)$*.*

IV. Se $M_1, M_2 \in \mathcal{A}$ *e* M_1 *e* M_2 *são disjuntos, então os subespaços* $E(M_1)(H)$ *e* $E(M_2)(H)$ *são ortogonais.*

V. Se $M_1, M_2 \in \mathcal{A}$*, então* $E(M_1)E(M_2) = E(M_2)E(M_1) = E(M_1 \cap M_2)$*.*

Demonstração. I. Seja $M_1 = \Omega$ e $M_n = \emptyset$ para $n \geq 2$. Claramente $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(M_n)_{n\geq 2}$ são sequências de conjuntos 2-a-2 disjuntos. Então:

$$\begin{aligned} E(\Omega) = E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} E(M_n) = E(\Omega) + \sum_{n=2}^{\infty} E(\emptyset) \\ &= E(\Omega) + E\left(\bigcup_{n=2}^{\infty} M_n\right) = E(\Omega) + E(\emptyset) \implies E(\emptyset) = 0. \end{aligned}$$

II. Agora, tome $M_1, ..., M_k \in \mathcal{A}$ 2-a-2 disjuntos. Podemos definir $M_n = \emptyset$ para $n \geq 2$ e teremos uma sequência $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos de $\mathcal{A}$ 2-a-2 disjuntos, então:

$$E\left(\bigcup_{n=1}^{k} M_n\right) = E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) = \sum_{n=1}^{k} E(M_n) + \underbrace{\sum_{n=k+1}^{\infty} E(\emptyset)}_{E(\emptyset)=0} = \sum_{n=1}^{k} E(M_n).$$

III. Sejam $M_1, M_2 \in \mathcal{A}$ tais que $M_1 \subseteq M_2$. Como

$$E(M_2) = E(M_1 \cup (M_2 \setminus M_1)) = E(M_1) + E(M_2 \setminus M_1)$$

é uma projeção ortogonal, pelo teorema 2.1.14, $E(M_1)(H) \subseteq E(M_2)(H)$, ou seja, $E(M_1) \leq E(M_2)$.

IV. Se $M_1, M_2 \in \mathcal{A}$ são disjuntos, $E(M_1 \cup M_2)$ é uma projeção ortogonal igual à $E(M_1) + E(M_2)$. Pelo teorema 2.1.14, $E(M_1)(H)$ e $E(M_2)(H)$ são subespaços ortogonais.

V. Sejam $M_1, M_2 \in \mathcal{A}$ quaisquer,

$$\begin{aligned} E(M_1)E(M_2) =& (E(M_1 \setminus M_2) + E(M_1 \cap M_2))(E(M_2 \setminus M_1) + E(M_1 \cap M_2)) \\ =& E(M_1 \setminus M_2)E(M_2 \setminus M_1) + E(M_1 \setminus M_2)E(M_1 \cap M_2) \\ &+ E(M_1 \cap M_2)E(M_2 \setminus M_1) + E(M_1 \cap M_2)E(M_1 \cap M_2) \end{aligned}$$

Como $M_1 \setminus M_2$, $M_1 \cap M_2$ e $M_2 \setminus M_1$ são 2-a-2 disjuntos, pelo corolário 2.1.13, os 3 primeiros termos da soma resultam no operador nulo e nós temos:

$$E(M_1)E(M_2) = E(M_1 \cap M_2)E(M_1 \cap M_2) = E^2(M_1 \cap M_2) = E(M_1 \cap M_2).$$

□

Teorema 2.2.2. *Se H é um espaço de Hilbert complexo e $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra sobre o conjunto Ω, uma função $E : \mathcal{A} \to \mathrm{Proj}(H)$ é uma medida espectral se, e somente se, $E(\Omega) = I$ e $E_x(M) := \langle E(M)x, x\rangle$ for uma medida positiva.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se E é uma medida espectral, $E(\Omega) = I$ e E é σ-aditiva. Tomando um conjunto enumerável $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos 2-a-2 disjuntos de $\mathcal{A}$, como o produto interno é aditivo e contínuo na primeira entrada,

$$\left\langle E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right)x, x\right\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} E(M_n)x, x\right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle E(M_n)x, x\rangle.$$

Assim E_x é σ-aditiva. Por fim, como $E(M)$ é uma projeção ortogonal, é um operador positivo e E_x é uma medida positiva:

$$E_x(M) = \langle E(M)x, x\rangle \geq 0, \qquad \forall M \in \mathcal{A}.$$

($\Leftarrow$) Tome E_x uma medida positiva, $E(\Omega) = I$ e, novamente, seja $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ um conjunto enumerável de elementos 2-a-2 disjuntos de $\mathcal{A}$. Uma vez que E_x é σ-aditiva, é também finitamente aditiva. Ou seja,

$$\left\langle E\left(\bigcup_{n=1}^{k} M_n\right)x, x\right\rangle = \sum_{n=1}^{k}\langle E(M_n)x, x\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{k} E(M_n)x, x\right\rangle, \qquad \forall x \in H$$

Por (2.2) temos que E também é finitamente aditiva. Como E define projeções ortogonais, temos, pelo teorema 2.1.14, que para qualquer $k \in \mathbb{N}$, $E(M_i)(H) \perp E(M_j)(H)$ para quaisquer $i, j \in \{1, 2, ..., k\}$. Como a escolha de k é arbitrária, $(E(M_n))_{n\in\mathbb{N}}$ em si é uma sequência de projeções ortogonais tais que $E(M_i)(H) \perp E(M_j)(H)$ para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}$. Com isso, e pelo teorema 2.1.17, a sequência de somas parciais $(\sum_{n=1}^{k} E(M_n))_{k\in\mathbb{N}}$ converge fortemente a uma projeção ortogonal representada por $\sum_{n=1}^{\infty} E(M_n)$. Agora, usando a σ-aditividade de H e a continuidade do produto interno, temos:

$$\left\langle E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right)x, x\right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle E(M_n)x, x\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} E(M_n)x, x\right\rangle$$

para todo $x \in H$. Então E também é σ-aditiva e, por definição, é uma medida espectral. $\square$

Observação. *Quando temos uma medida espectral E, a notação E_x representando a medida $E_x(M) = \langle E(M)x, x\rangle$ será conveniente, então adiante assumiremos sempre que E_x descreve precisamente a medida descrita no teorema anterior.*

2.2.2 Integração espectral de funções limitadas

Com a noção de uma medida espectral bem estabelecida, seguiremos um trajeto comum à teoria da medida para definir a integração com relação a uma medida espectral.

Seja H um espaço de Hilbert complexo, Ω um conjunto e $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra sobre Ω, chamamos de $\mathcal{B}(\Omega, \mathcal{A})$ o espaço de Banach[4] de funções $f : \Omega \to \mathbb{C}$ limitadas e $\mathcal{A}$-mensuráveis com a norma $\|f\|_\Omega = \sup_{t\in\Omega} |f(t)|$. Chamamos de $\mathcal{B}_s(\Omega, \mathcal{A})$ o subespaço de funções simples. Isto é, funções da forma

$$\varphi = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n \chi_{M_n}$$

onde $\chi_M : \Omega \to \mathbb{C}$ é a função característica de M_n. Para $M_1, ..., M_k \in \mathcal{A}$ 2-a-2 disjuntos e $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{C}$. Definimos então a integral com relação a E para funções simples $\varphi = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n \chi_{M_n}$ como

$$\int_\Omega \varphi dE = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n E(M_n).$$

Podemos logo verificar que

$$\left\| \int_\Omega \varphi dE \right\| \leq \|\varphi\|_\Omega \tag{2.3}$$

já que $\|E(\cup_{n=1}^{k} M_n)\| \leq 1$ (é uma projeção) e

$$\begin{aligned} \left\| \int_\Omega \varphi dE \right\| &= \left\| \sum_{n=1}^{k} \alpha_n E(M_n) \right\| \leq \left\| \sum_{n=1}^{k} \|\varphi\|_\Omega E(M_n) \right\| \\ &\leq \|\varphi\|_\Omega \left\| E\left(\bigcup_{n=1}^{k} M_n \right) \right\| \leq \|\varphi\|_\Omega. \end{aligned}$$

Para estender essa definição para funções $f \in \mathcal{B}(\Omega, \mathcal{A})$, exploraremos 3 fatos:

1. Para qualquer $f \in \mathcal{B}(\Omega, \mathcal{A})$ existe uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{B}_s(\Omega, \mathcal{A})$ que converge a f na norma $\|\cdot\|_\Omega$. Ou seja, $\mathcal{B}_s(\Omega, \mathcal{A})$ é denso em $\mathcal{B}(\Omega, \mathcal{A})$.

[4] Adicionar referência de porque é um espaço de Banach.

2. O limite $\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \varphi_n dE$, para uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B_s(\Omega,\mathcal{A})$ tal que $\varphi_n \to f$, existe.

3. O limite $\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \varphi_n dE$ independe da escolha de sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}_s(\Omega,\mathcal{A})$ tal que $\varphi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\Omega} f$.

Primeiramente, veja que para quaisquer $f \in \mathcal{B}(\Omega,\mathcal{A})$ e $\varepsilon > 0$, a imagem de f está contida na bola fechada $B_{\|f\|_\Omega}[0] \subseteq \mathbb{C}$. Como $B_{\|f\|_\Omega}[0]$ é um conjunto compacto e $\{B_\varepsilon(z) : z \in B_{\|f\|_\Omega}[0]\}$ é uma cobertura de abertos, existe uma subcobertura finita $\{B_\varepsilon(z_1), ..., B_\varepsilon(z_n)\}$. Como f é $\mathcal{A}$-mensurável, $f^{-1}(B_\varepsilon(z_1)), ..., f^{-1}(B_\varepsilon(z_n)) \in \mathcal{A}$. Como esses conjuntos não necessariamente são disjuntos, tomamos

$$M_k = f^{-1}(B_\varepsilon(z_k)) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} f^{-1}(B_\varepsilon(z_i))\right) \in \mathcal{A}, \qquad \forall k \in \{1, ..., n\}.$$

E então podemos definir

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} z_k \chi_{M_k} \in \mathcal{B}_s(\Omega,\mathcal{A})$$

e teremos que, para qualquer $x \in \Omega$, existe $k \in \{1, ..., n\}$ tal que $z_k \in M_k$ e $f(x) \in B_\varepsilon(z_k)$. Assim, $|f(x) - \varphi(x)| = |f(x) - z_k| < \varepsilon$. Ou seja, $\|f - \varphi\|_\Omega \leq \varepsilon$.

E, para qualquer $f \in \mathcal{B}(\Omega,\mathcal{A})$ podemos tomar $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}_s(\Omega,\mathcal{A})$ tal que $\varphi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\Omega} f$. Com isso definimos:

$$\int_\Omega f dE = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \varphi_n dE.$$

Para ver que esse limite existe, usamos a equação (2.3) para identificar que $(\int_\Omega \varphi_n dE)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy de operadores lineares limitados (já que $(\varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy na norma $\|\cdot\|_\Omega$). Como $B(H,H)$ é um espaço de Banach, a sequência $(\int_\Omega \varphi_n dE)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Por fim verificamos que, dada qualquer outra escolha $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}_s(\Omega,\mathcal{A})$, tal que $\phi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\Omega} f$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \phi_n dE = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \varphi_n dE.$$

Para isso, basta ver que $(\varphi_n - \phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathcal{B}_s(\Omega,\mathcal{A})$ que converge a 0 (e que a integral é aditiva para funções simples):

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \left\| \int_\Omega (\varphi_n - \phi_n) dE \right\| \leq \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \phi_n\|_\Omega = 0.$$

Alternativamente também indicamos a integral $\int_\Omega f dE$ por $\int_\Omega f(\lambda) dE(\lambda)$. Com a integral bem definida podemos desenvolver agora algumas de suas propriedades:

Teorema 2.2.3. *Sejam H um espaço de Hilbert complexo, $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra sobre um conjunto Ω, $E : \mathcal{A} \to \mathrm{Proj}(H)$ uma medida espectral, $f, g \in \mathcal{B}(\Omega,\mathcal{A})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Temos que:*

I. $E(M) = \int_\Omega \chi_M dE$ *para qualquer* $M \in \mathcal{A}$.

II. $\int_\Omega \alpha f + \beta g dE = \alpha \int_\Omega f dE + \beta \int_\Omega g dE$.

III. $\int_\Omega fg dE = (\int_\Omega f dE)(\int_\Omega f dE)$.

IV. $\left\langle \left(\int_\Omega f dE\right) x, x \right\rangle = \int_\Omega f(\lambda) d\langle E(\lambda)x, x\rangle$.

V. $\left\| \left(\int_\Omega f dE\right) x \right\|^2 = \int_\Omega |f(\lambda)|^2 d\langle E(\lambda)x, x\rangle$.

VI. $(\int_\Omega f dE)E(M) = E(M)(\int_\Omega f dE) = \int_M f dE$ *para qualquer* $M \in \mathcal{A}$.

Demonstração.

I. Segue imediatamente da definição da integral, já que χ_M é uma função simples.

II. Primeiro, verificaremos essa relação para funções simples. Tome $\varphi = \sum_{n=1}^m \alpha_n \chi_{M_n}$ e $\phi = \sum_{j=1}^k \beta_j \chi_{N_j}$ para $\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ..., \beta_k, \theta \in \mathbb{C}$, $M_1, ..., M_m$ 2-a-2 disjuntos e $N_1, ..., N_k$ também 2-a-2 disjuntos, todos elementos de $\mathcal{A}$. Claramente,

$$\int_\Omega \theta\varphi dE = \sum_{n=1}^m \theta\alpha_n E(M_n) = \theta \sum_{n=1}^m \alpha_n E(M_n) = \theta \int_\Omega \varphi dE.$$

Agora, sejam $M = \bigcup_{n=1}^{m} M_n$ e $N = \bigcup_{j=1}^{k} N_j$, somando essas funções teremos uma função da forma

$$\varphi + \phi = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \chi_{M_n \cap (\Omega \setminus N)} + \sum_{j=1}^{k} \beta_j \chi_{N_j \cap (\Omega \setminus M)} + \sum_{\substack{1 \leq n \leq m \\ 1 \leq j \leq k}} (\alpha_n + \beta_j) \chi M_n \cap N_j.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\varphi + \phi) dE = &\sum_{n=1}^{m} \alpha_n E(M_n \cap (\Omega \setminus N)) + \sum_{j=1}^{k} \beta_j E(N_j \cap (\Omega \setminus M)) \\
&+ \sum_{\substack{1 \leq n \leq m \\ 1 \leq j \leq k}} (\alpha_n + \beta_j) E(M_n \cap N_j)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\varphi + \phi) dE = &\sum_{n=1}^{m} \alpha_n \left(\sum_{j=1}^{k} E(M_n \cap N_j) + E(M_n \cap (\Omega \setminus N)) \right) \\
&+ \sum_{j=1}^{k} \beta_j \left(\sum_{n=1}^{m} E(M_n \cap N_j) + E(N_j \cap (\Omega \setminus M)) \right) \\
= &\sum_{n=1}^{m} \alpha_n E(M_n) + \sum_{j=1}^{k} \beta_j E(N_j) \\
= &\int_\Omega \varphi dE + \int_\Omega \phi dE.
\end{aligned}$$

Com isso confirmamos a afirmação do enunciado para o caso em que f e g são simples. Para verificar o caso geral, com $f, g \in \mathcal{B}(\Omega, \mathcal{A})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, basta usarmos $\varphi_n \to f$, $\phi_n \to g$ ($\varphi_1, ..., \phi_1, ... \in \mathcal{B}_s(\Omega, \mathcal{A})$) e a linearidade do limite:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\alpha f + \beta g) dE &= \lim_{n \to \infty} \int_\Omega (\alpha \varphi_n + \beta \phi_n) dE \\
&= \alpha \lim_{n \to \infty} \int_\Omega \varphi_n dE + \beta \lim_{n \to \infty} \int_\Omega \phi_n dE \\
&= \alpha \int_\Omega f dE + \beta \int_\Omega g dE.
\end{aligned}$$

III. Para o enunciado ter algum significado precisamos reconhecer que $f, g \in \mathcal{B} \implies fg \in \mathcal{B}$. Verificar que fg é uma função mensurável é algo

Novamente, verificaremos inicialmente esse fato para funções simples $\varphi = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \chi_{M_n}$ e $\phi = \sum_{j=1}^{k} beta_j \chi_{N_j}$ como no item anterior. É fácil ver que a composição de funções simples resulta em uma função simples da forma:

$$(\varphi\phi)(x) = \sum_{n=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} \alpha_n \beta_j \chi_{M_n \cap N_j}.$$

Daí, pela definição da integral espectral para funções simples e pelo Teorema 2.2.1:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \varphi\phi dE &= \sum_{n=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} \alpha_n \beta_j E(M_n \cap N_j) \\
&= \sum_{n=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} \alpha_n \beta_j E(M_n) E(N_j) \\
&= \sum_{n=1}^{m} \alpha_n E(M_n) \sum_{j=1}^{k} \beta_j E(N_j) \\
&= \left(\int_\Omega \varphi dE \right) \left(\int_\Omega \phi dE \right).
\end{aligned}$$

Agora, estenderemos resultado para funções $f, g \in \mathcal{B}$ quaisquer. Para isso, tome $\varphi_n \to f$ e $\phi_n \to g$ $(\varphi_1, ..., \phi_1, ... \in \mathcal{B}_s(\Omega, \mathcal{A}))$. O próximo passo natural é confirmar que $\varphi_n \phi_n$ (que são funções simples) convergem em norma para fg.

Então

$$\int_\Omega fg dE = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega ($$

IV. Sabemos, do teorema 2.2.2, que $\mu_x(M) = \langle E(M)x, x \rangle$ (para $M \in \mathcal{A}$) define uma medida positiva em $\mathcal{A}$.

Agora, seja $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}_s(\Omega, \mathcal{A})$ tal que $\varphi_n = \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i} \chi_{M_{n,i}}$ para todo

$n \in \mathbb{N}$ e $\varphi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\Omega} f$

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(\int_\Omega f dE \right) x, x \right\rangle &= \left\langle \left(\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi_n dE \right) x, x \right\rangle \\
&= \left\langle \lim_{n\to\infty} \left(\int_\Omega \varphi_n dE \right) x, x \right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\langle \left(\sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i} E(M_{n,i}) \right) x, x \right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \alpha_{n,i} \langle E(M_{n_i}) x, x \rangle \\
&= \int_\Omega f(\lambda) d\langle E(\lambda)x, x\rangle.
\end{aligned}$$

A última dessas igualdades não é trivial mas segue argumentos usuais da teoria da medida que, por fugirem do nosso foco, são omitidos.

V. Nas mesmas condições do item anterior, verificamos que, pela continuidade da função $\|\cdot\|^2$,

$$\begin{aligned}
\left\| \left(\int_\Omega f dE \right) x \right\|^2 &= \left\| \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i} E(M_{n,i}) \right) x \right\|^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\| \left(\sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i} E(M_{n,i}) \right) x \right\|^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\langle \left(\sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i} E(M_{n,i}) \right) x, \left(\sum_{j=1}^{k_n} \alpha_{n,j} E(M_{n,j}) \right) x \right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \overline{\alpha_{n,j}} \left\langle \left(\sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i} E(M_{n,i}) \right) x, E(M_{n,j}) x \right\rangle.
\end{aligned}$$

Como cada operador $E(M_{n,j})$ é auto-adjunto e pelo Teorema 2.2.1:

$$
\begin{aligned}
\left\|\left(\int_\Omega f dE\right) x\right\|^2 &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \overline{\alpha_{n,j}} \left\langle E(M_{n,j}) \left(\sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i} E(M_{n,i}) \right) x, x \right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \overline{\alpha_{n,j}} \left\langle \left(\sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i} E(M_{n,i} \cap M_{n,j}) \right) x, x \right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \overline{\alpha_{n,j}} \left\langle \alpha_{n,j} E(M_{n,j}) x, x \right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \overline{\alpha_{n,j}} \alpha_{n,j} \left\langle E(M_{n,j}) x, x \right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} |\alpha_{n,j}|^2 \left\langle E(M_{n,j}) x, x \right\rangle \\
&= \int_\Omega |f(\lambda)|^2 d\langle E(\lambda)x, x\rangle.
\end{aligned}
$$

VI. Tome $M \in \mathcal{A}$ qualquer. Pela definição da integral espectral temos

$$
\int_\Omega f dE = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi_n dE = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i} E(M_{n,i}).
$$

Agora, tome $G_M : B(H,H) \to B(H,H)$ tal que $G_M(T) = E(M) \circ T$. Claramente G_M é linear e limitado ($\|G_M(T)\| \leq \|E_M\|\|T\| \leq \|T\|$). Ou seja, é um operador contínuo e como $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i} E(M_{n,i})$ converge na norma de $B(H,H)$, pelo teorema 2.2.1

$$
\begin{aligned}
E(M) \left(\int_\Omega f dE \right) &= E(M) \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i} E(M_{n,i}) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} E(M) \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i} E(M_{n,i}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i} E(M_{n,i} \cap M).
\end{aligned}
$$

Similarmente, o operador $H_M : B(H,H) \to B(H,H)$, tal que $H_M(T) = T \circ E(M)$ para todo $T \in B(H,H)$, também é contínuo e com isso:

$$\begin{aligned}
\left(\int_\Omega f dE\right) E(M) &= \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i} E(M_{n,i})\right) E(M) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i} E(M_{n,i}) E(M) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i} E(M_{n,i} \cap M).
\end{aligned}$$

Por fim, uma vez que $\|f - \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i} \chi_{M_{n,i}}\|_\Omega \xrightarrow{n\to\infty} 0$, então

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i} \chi_{M_{n,i} \cap M} \right\|_M \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_M f dE &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i} E(M_{n,i} \cap M) \\
&= E(M) \left(\int_\Omega f dE\right) = \left(\int_\Omega f dE\right) E(M).
\end{aligned}$$

□

2.2.3 O Teorema Espectral para operadores limitados auto-adjuntos

Com a noção de integral espectral desenvolvida na seção anterior, e as informações que temos sobre o espectro de operadores limitados auto-adjuntos, podemos tratar o teorema espectral em si. O único resultado que nos resta mencionar é um ao qual não apresentaremos uma demonstração por não ser um resultado de análise funcional. Este é o teorema a seguir, conhecido como o teorema da representação de Riesz-Markov-Kakutani.:

Teorema 2.2.4 (Riesz-Markov-Kakutani)**.** *Se X é um espaço de Hausdorff localmente compacto, então para todo funcional linear limitado φ em $C_0(X)$ existe uma medida de Borel complexa μ única tal que*

$$\varphi(f) = \int_a^b f d\mu, \qquad \forall f \in C_0(X).$$

Teorema 2.2.5 (Teorema Espectral)**.** *Se H é um espaço de Hilbert complexo, $T : H \to H$ é um operador linear limitado e auto-adjunto e $[a,b]$ é um intervalo compacto em $\mathbb{R}$ que contém $\sigma(T)$, então existe uma medida espectral E única na σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}([a,b])$ tal que:*

$$T = \int_a^b \lambda dE(\lambda)$$

e $p(T) = \int_a^b p(\lambda)dE(\lambda)$ para qualquer $p \in \mathbb{C}[t]$. Além disso, se F for uma medida espectral em $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que $T = \int_a^b \lambda dF(\lambda)$ teremos que $F(M) = E(M \cap [a,b])$ para todo $M \in \mathcal{B}(A)$.

Demonstração. Começaremos provando a existência da medida espectral E. Para isso, nossa argumentação estará centrada em encontrar uma medida complexa com o Teorema 2.2.4 e, usando ela, criar uma medida espectral adequada.

Primeiro, definimos o operador $F_{x,y} : \mathbb{C}[t] \to \mathbb{C}$ de forma que

$$F_{x,y}(p) = \langle p(T)x, y\rangle.$$

Onde $p = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + ... + a_0$ e $p(T) = a_n T^n + a_{n-1}T^{n-1} + ... + a_0 I$, com $a_n, ..., a_0 \in \mathbb{C}$. De imediato temos que

$$|F_{x,y}(p)| = \langle p(T)x, y\rangle \leq \|p(T)\|\|x\|\|y\| \leq \|p\|_{[a,b]}\|x\|\|y\|.$$

Ou seja, para cada escolha de $x, y \in H$, $F_{x,y}$ é um funcional linear limitado sobre $(\mathbb{C}[t], \|\cdot\|_{[a,b]})$. Para usar o Teorema 1.3.3 precisamos estender $F_{x,y}$ à $C_0([a,b]) = C([a,b])$ (já que $[a,b]$ é compacto). Pelo Teorema de Weierstrass, os polinômios $\mathbb{C}[t]$ são densos no espaço de funções contínuas e limitadas $C([a,b])$. Como $\mathbb{C}$ é um espaço de Banach, $F_{x,y}$ admite uma extensão linear limitada única $\tilde{F}_{x,y} : C([a,b]) \to \mathbb{C}$. E, pelo Teorema 2.2.4 temos que existe uma medida complexa $\mu_{x,y}$ que nos permite escrever:

$$F_{x,y}(p) = \langle p(T)x, y\rangle = \int_a^b p d\mu_{x,y}. \tag{2.4}$$

Nosso próximo passo será provar algumas propriedades acerca das medidas $\mu_{x,y}$. Da linearidade da primeira entrada do produto interno temos que, dados $x_1, x_2, y \in H$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\int_a^b p d\mu_{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y} &= \langle p(T)(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2), y\rangle \\ &= \alpha_1 \langle p(T) x_1, y\rangle + \alpha_2 \langle p(T) x_2, y\rangle \\ &= \alpha_1 \int_a^b p d\mu_{x_1,y} + \alpha_2 \int_a^b p(\lambda) d\mu_{x_2,y} \\ &= \int_a^b p d(\alpha_1 \mu_{x_1,y} + \alpha_2 \mu_{x_2,y}).\end{aligned}$$

Pela unicidade da medida no Teorema 2.2.4 temos:

$$\mu_{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y} = \alpha_1 \mu_{x_1,y} + \alpha_2 \mu_{x_2,y}.$$

Analogamente, pela conjugado-linearidade da segunda entrada do produto interno, para $x, y_1, y_2 \in H$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\int_a^b p d\mu_{x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2} &= \langle p(T)x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\rangle \\ &= \overline{\alpha_1} \langle p(T)x, y_1\rangle + \overline{\alpha_2} \langle p(T)x, y_2\rangle \\ &= \overline{\alpha_1} \int_a^b p d\mu_{x,y_1} + \overline{\alpha_2} \int_a^b p(\lambda) d\mu_{x,y_2} \\ &= \int_a^b p d(\overline{\alpha_1} \mu_{x,y_1} + \overline{\alpha_2} \mu_{x,y_2}).\end{aligned}$$

Que nos dá

$$\mu_{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y} = \overline{\alpha_1} \mu_{x_1,y} + \overline{\alpha_2} \mu_{x_2,y}.$$

Com isso, podemos pensar em $\mu_{x,y}(M)$, com $M \in \mathcal{B}([a,b])$, como uma função sesquilinear $H \times H \mapsto \mathbb{C}$ que leva $(x,y) \in H \times H$ para $\mu_{x,y}(M) \in \mathbb{C}$. Como tal, podemos usar o Teorema da Representação de Riesz para funções sesquilineares (c.f. [5] pg.192) para encontrar um operador linear limitado e único $E(M) : H \to H$ tal que:

$$\mu_{x,y}(M) = \langle E(M)x, y\rangle, \qquad \forall x, y \in H. \tag{2.5}$$

Esses operadores $E(M)$ que darão origem a medida espectral que buscamos. Mas primeiro, precisamos mostrar que $E(M)$ é realmente uma projeção. Para este fim, veja que, como T (e consequentemente T^k para $k \in \mathbb{N}$) é um operador auto-adjunto:

$$\begin{aligned}
\int_a^b p d\mu_{x,y} &= \langle p(T)x, y\rangle = \langle (a_n T^n + ... + a_0 I)x, y\rangle = \sum_{k=0}^{n} a_k \langle T^k x, y\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \langle x, T^k y\rangle = \sum_{k=0}^{n} \langle x, \overline{a_k} T^k y\rangle = \langle x, \overline{p}(T)y\rangle \\
&= \overline{\langle \overline{p}(T)y, x\rangle} = \overline{\int_a^b \overline{p} d\mu_{y,x}} = \int_a^b p d\overline{\mu_{y,x}}.
\end{aligned}$$

Mais uma vez, pela unicidade do teorema da representação de Riesz,

$$\mu_{x,y} = \overline{\mu_{y,x}}$$

e com isso, para quaisquer $x, y \in H$:

$$\langle E(M)x, y\rangle = \mu_{x,y}(M) = \overline{\mu_{y,x}(M)} = \overline{\langle E(M)y, x\rangle} = \langle x, E(M)y\rangle.$$

Ou seja, $E(M)$ é um operador auto-adjunto. Para provar agora que $E(M)$ é idempotente, usaremos a seguinte propriedade[5]:

$$\int_a^b p d\mu_{q(A)x,y} = \langle p(A)q(A)x, y\rangle = \langle (pq)(A)x, y\rangle = \int_a^b pq d\mu_{x,y}$$

Agora, definindo $\upsilon_{x,y}(N) = \int_N q d\mu$ para $N \in \mathcal{B}([a, b])$ qualquer, podemos verificar que $\upsilon_{x,y}$ é uma medida complexa tal que

$$\int_a^b p d\mu_{q(A)x,y} = \int_a^b p d\upsilon_{x,y}.$$

Pela unicidade da medida no teorema da representação de Riesz, temos que $\mu_{q(A)x,y} = \upsilon_{x,y}$ e

$$\langle E(M)q(A)x, y\rangle = \int_M q d\mu_{x,y}, \qquad \forall M \in \mathcal{B}([a, b]).$$

[5]Na passagem $p(a)q(a) = (pq)(A)$, usamos que o produto dos polinômios $p(A)$ e $q(A)$ coincide com o polinômio $(pq)(A)$ para $pq \in \mathbb{C}[t]$.Esse fato segue, por exemplo, do teorema fundamental da álgebra.

Com isso, e dado que $E(M)$ é auto-adjunto, temos que

$$\int_a^b q d\mu_{x,E(M)y} = \langle q(A)x, E(M)y\rangle = \langle E(M)q(A)x, y\rangle = \int_a^b q\chi_M d\mu_{x,y}.$$

Mais uma vez, como $\eta(N) = \int_N \chi_M d\mu_{x,y}$ define uma medida para $N \in \mathcal{B}([a,b])$ e $\int_a^b q d\eta = \int_a^b q\chi_M d\mu_{x,y}$, podemos usar a unicidade da medida no teorema da representação de Riesz para conseguir que:

$$\mu_{x,E(M)y}(N) = \int_N \chi_M d\mu_{x,y} = \mu_{x,y}(M \cap N), \qquad \forall N \in \mathcal{B}([a,b]).$$

Então, para $N = M$ e $M \in \mathcal{B}([a,b])$ e $x, y \in H$ quaisquer :

$$\langle E^2(M)x, y\rangle = \langle E(M)x, E(M)y\rangle = \mu_{x,E(M)y}(M) = \mu_{x,y}(M) = \langle E(M)x, y\rangle.$$

Então $E^2(M) = E(M)$ e $E(M)$ é uma projeção ortogonal. Agora, como $\mu_{x,x}$ é uma medida complexa, é σ-aditiva e pelo Teorema 2.2.2, E é uma medida espectral.

Combinando (2.4) e (2.5) temos:

$$\langle p(T)x, y\rangle = \int_a^b p(\lambda)\langle E(\lambda)x, y\rangle, \qquad \forall x, y \in H.$$

Do item 1 do Teorema 2.2.3 temos que:

$$\langle p(T)x, y\rangle = \left\langle \left(\int_a^b p dE\right) x, y \right\rangle, \quad \forall x, y \in H \implies p(T) = \int_a^b p(\lambda) dE(\lambda).$$

Portanto,

$$\boxed{p(T) = \int_a^b p(\lambda) dE(\lambda).}$$

Em particular, para $p(\lambda) = \lambda$, temos $T = \int_a^b \lambda dE$.

Agora, para ver que essa representação é única, suponha que existe uma medida espectral $F : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Proj}(H)$ tal que $p(T) = \int_{\mathbb{R}} p(\lambda) dF$ para qualquer $p \in \mathbb{C}[t]$. E seja $N_n = [b + \frac{1}{n}, +\infty)$ uma sequência de intervalos em $\mathbb{R}$.

Usando o Teorema 2.2.3 temos, para $x \in H$ e $n \in \mathbb{N}$ quaisquer:

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(\int_{\mathbb{R}} \lambda dF \right) F(N_n)x, F(N_n)x \right\rangle &= \left\langle F(N_n) \left(\int_{\mathbb{R}} f dF \right) F(N_n)x, x \right\rangle \\
&= \left\langle \int_{N_n} \lambda dF x, x \right\rangle = \int_{N_n} \lambda d\langle F(\lambda)x, x\rangle \\
&\geq (b + \tfrac{1}{n}) \int_{N_n} d\langle F(\lambda)x, x\rangle \\
&= (b + \tfrac{1}{n}) \langle F(N_n)x, x\rangle \\
&= (b + \tfrac{1}{n}) \langle F(N_n)x, F(N_n)x\rangle \\
&= (b + \tfrac{1}{n}) \|F(N_n)x\|^2.
\end{aligned}$$

Já que $T = \int_{\mathbb{R}} \lambda dF$ e tomando

$$m = \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle \quad \text{e} \quad M = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle,$$

temos por hipótese e pelo Teorema 2.1.7 que $[m, M] \subseteq [a, b]$. Assim, $F(N_n)x = 0$ para todo $x \in H$ e $n \in \mathbb{N}$. Caso contrário, haveria x_0 tal que $\|F(N_n)x_0\| > 0$ (para algum $n \in \mathbb{N}$), $x_1 = \|F(N_n)x_0\|^{-1}x_0 \in H$ e $x_2 = F(N_n)x_1 \in H$ com $\|x_2\| = 1$ que nos daria $\langle Tx_2, x_2\rangle \geq b \geq M$, um absurdo. Com isso, temos que $F((b, +\infty)) = \text{s-lim}_{n\to\infty} F(N_n) = 0$.

Analogamente, para $E_n = (-\infty, a - \frac{1}{n}]$ temos:

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(\int_{\mathbb{R}} \lambda dF \right) F(E_n)x, F(E_n)x \right\rangle &= \int_{E_n} \lambda d\langle F(\lambda)x, x\rangle \\
&\leq (a - \tfrac{1}{n}) \int_{E_n} d\langle F(\lambda)x, x\rangle \\
&= (a - \tfrac{1}{n}) \langle F(E_n)x, x\rangle \\
&= (a - \tfrac{1}{n}) \langle F(E_n)x, F(E_n)x\rangle \\
&= (a - \tfrac{1}{n}) \|F(E_n)x\|^2,
\end{aligned}$$

para quaisquer $x \in H$ e $n \in \mathbb{N}$. Como $\langle Tx, x\rangle \geq m$ para todo $x \in H$ com $\|x\| = 1$, $F(E_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $F((-\infty, a)) = 0$. Pelo teorema 2.2.3:

$$\langle p(T)x, x\rangle = \int_{\mathbb{R}} p(\lambda) d\langle F(\lambda)x, x\rangle = \int_a^b p(\lambda) d\langle F(\lambda)x, x\rangle, \qquad \forall p \in \mathbb{C}[t].$$

Com isso temos $\langle E(N)x, x\rangle = \langle F(N)x, x\rangle$ para todo $n \in \mathcal{B}([a, b])$. Por (2.2), temos que

$$\begin{aligned} F(M) &= F(M \cap [a, b]) + \underbrace{F(M \setminus (-\infty, a))}_{0} + \underbrace{F(M \setminus (b, +\infty))}_{0} \\ &= E(M \cap [a, b]), \qquad \forall M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

□

Corolário 2.2.6. *Sejam $T : H \to H$ um operador linear limitado e auto-adjunto, E uma medida espectral com a qual $T = \int_a^b \lambda dE$ para $\sigma(T) \subseteq [a, b]$, e $S : H \to H$ um operador linear limitado, S e T comutam se, e somente se, S comuta com todas as projeções $E(M)$ para $M \in \mathcal{B}([a, b])$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que $T = \int_a^b \lambda dE$ e que $S \in B(H, H)$ são tais que $TS = ST$. Pelo teorema espectral, $p(T) = \int_a^b p(\lambda) dE(\lambda)$ para cada $p \in \mathbb{C}[t]$. Então

$$\begin{aligned} \int_a^b p(\lambda) d\langle E(\lambda)Sx, y\rangle &= \langle p(T)Sx, y\rangle = \langle Sp(T)x, y\rangle = \langle p(T)x, S^*y\rangle \\ &= \int_a^b p(\lambda) d\langle E(\lambda)x, S^*y\rangle, \qquad \forall p \in \mathbb{C}[t]. \end{aligned}$$

Pela unicidade da medida no teorema 2.2.4,

$$\langle E(M)Sx, y\rangle = \langle E(M)x, S^*y\rangle = \langle SE(M)x, y\rangle, \qquad \forall x, y \in H, \forall M \in \mathcal{B}([a, b]).$$

Ou seja, $E(M)S = SE(M)$ para todo $M \in \mathcal{B}([a, b])$.

($\Leftarrow$) Por outro lado, suponha que $S \in B(H, H)$ é tal que $E(M)S = SE(M)$ para todo $M \in \mathcal{B}([a, b])$ para E uma medida espectral tal que $T = \int_a^b \lambda dE$. □

Capítulo 3

Operadores ilimitados auto-adjuntos

O Teorema Espectral nos oferece além de uma representação adicional a operadores lineares limitados e auto-adjuntos. Mas conecta diretamente o espaço $B($ de funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

3.1 O Teorema Espectral para operadores ilimitados

Nesta seção nosso foco será em adaptar o Teorema Espectral para reduzir a hipótese do operador ser limitado. Para operadores auto-adjuntos, essa ainda não é uma noção muito clara, já que definimos operadores adjuntos diretamente no caso limitado (2.1.1). Assim, o primeiro passo natural é definir o que queremos dizer com isso.

3.1.1 Integração espectral de funções ilimitadas

Nesta subseção buscaremos uma generalização da noção de integração espectral para o caso em que f não é uma função limitada. Sem o requisito de f ser uma função limitada, podemos abranger ainda mais o seu formato: Seja H um espaço de Hilbert complexo e $E : \mathcal{A} \to \mathrm{Proj}(H)$ uma medida espectral, consideraremos funções $f : \Omega \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ que são *finitas em quase* *todo ponto* com relação a E[1]. Isto é,

$$E(\{x \in \Omega : f(x) = \infty\}) = 0.$$

Neste caso representaremos por $\mathcal{S}(\Omega, \mathcal{A}, E)$, ou simplesmente $\mathcal{S}$, o conjunto de funções $f : \Omega \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ finitas em quase todo ponto.

Quando definimos a integração espectral na subseção 2.2.2, a limitação das funções $f : \Omega \to \mathbb{C}$ a serem integradas, e em particular a norma do $\|f\|_\Omega$, foram centrais à nossa abordagem. A forma como contornaremos contornaremos esse obstáculo para generalizar a integração espectral remete a uma estratégia que agora nos deve ser costumeira: Reteremos alguma noção de limitação. Isso vem a nós na forma das sequências limitantes:

Definição 3.1.1. Uma sequência $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita uma sequência limitante de um conjunto de funções $\mathcal{F} \in \mathcal{S}$ se:

i. cada $f \in \mathcal{F}$ é limitada em M_n para todo $n \in \mathbb{N}$;

ii. $M_n \subseteq M_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$; e

iii. $E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) = I$.

Estas são sequência crescentes de conjuntos mensuráveis $M_n \subseteq \Omega$ que "caminham para representar toda a medida do espaço Ω que habitam". E são particularmente convenientes por "interagirem bem" com a medida espectral em alguns sentidos: Uma consequência imediata do Teorema 2.2.1 é que medida E acompanha o crescimento dos conjuntos

$$M_n \subseteq M_{n+1} \implies E(M_n) \leq E(M_{n+1}).$$

Além disso, reescrevendo $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como uma sequência de conjuntos disjuntos $M^*_{n+1} = M_{n+1} \setminus M_n$ podemos verificar que as projeções $E(M_n)$ convergem fortemente para a identidade:

$$\underset{n\to\infty}{\text{s-lim}}\, E(M_n) = \underset{n\to\infty}{\text{s-lim}} \sum_{k=1}^{n} E(M^*_k) = E\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} M^*_k\right) = E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) = I. \quad (3.1)$$

[1]Omitiremos a menção da medida espectral quando ela estiver clara no contexto, dizendo apenas que f é "finita em quase todo ponto"

A convergência forte nos garante também que, coletivamente, as projeções $E(M_n)$ representam um subconjunto denso em H na topologia da norma. Especificamente,

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} E(M_n)H} = H. \tag{3.2}$$

Para ver isso, suponha o contrário, então existe um ponto $x_0 \in H$ e um aberto U entorno de x_0 tal que $U \subseteq H \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E(M_n)(H)$. Então, como

$$E(M_n)x_0 \in E(M_n)H \subseteq H \setminus U$$

e $H \setminus U$ é fechado, $\lim_{n\to\infty} E(M_n)x_0 \in H \setminus U \implies \lim_{n\to\infty} E(M_n)x_0 \neq x_0$, uma contradição à equação (3.1).

Exemplo 3.1.1. Se $\mathcal{F} = \{f_1, ..., f_k\}$ é uma família de $k \in \mathbb{N}$ funções de $\mathcal{S}$, $M_n = \{x \in \Omega : |f_i(x)| \leq n,\ i = 1, ..., k\}$ define uma sequência limitante $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Seguindo por passos similares aos da definição da integral espectral para funções limitadas no começo da subseção 2.2.2, definimos uma noção de integral espectral para funções em $\mathcal{S}$:

Teorema 3.1.1. *Se $f \in S$, definimos o conjunto*

$$\mathcal{D}(\textstyle\int f dE) = \left\{x \in H : \int_\Omega |f(t)|^2 d\langle E(t)x, x\rangle < +\infty\right\}. \tag{3.3}$$

E, temos que:

I. Existe uma sequência $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitante de $\{f\}$.

II. Para qualquer sequência limitante $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{f\}$,

$$x \in \mathcal{D}(\textstyle\int f dE) \iff \left(\int_\Omega f\chi_{M_n} dE\right) x \text{ converge em } H \tag{3.4}$$

e o limite forte dos operadores $\int_\Omega f\chi_{M_n} dE$ define em $\mathcal{D}(\int f dE)$ um operador linear $\int_\Omega f dE : \mathcal{D}(\int f dE) \to H$ por

$$\left(\int_\Omega f dE\right) x := \lim_{n\to\infty} \left(\int_\Omega f\chi_{M_n} dE\right) x, \qquad \forall x \in \mathcal{D}(\textstyle\int f dE).$$

III. O operador $\int_\Omega f dE$ independe da escolha de sequência limitante $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

IV. $\int_\Omega f dE$ é um operador densamente definido. Em particular, $\mathrm{Dom}(\int_\Omega f dE)$ *contém $\bigcup_n^{\infty} E(M_n)H$.*

Demonstração.

I. Segue de imediato do exemplo 3.1.1.

II. Seja $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitante e $x \in \mathrm{Dom}(\int_\Omega f dE)$ qualquer. Como f é limitado em M_n, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $f\chi_{M_n}$ é uma função limitada e o operador $\int_\Omega f\chi_{M_n} dE$ está bem definido. Agora veja que, pelo Teorema 2.2.3,

$$\left\|\left(\int_\Omega f\chi_{M_n} dE\right) x\right\|^2 = \int_\Omega |f\chi_{M_n}|^2 dE_x.$$

Como E_x é uma medida positiva (pelo Teorema 2.2.2), existe o espaço normado $(L_2(\Omega, E_x), \|\cdot\|_{L_2(\Omega,E_x)})$ onde $f\chi_{M_n}$ é representante de uma classe de equivalência e podemos escrever:

$$\left\|\left(\int_\Omega f\chi_{M_n} dE\right) x\right\|^2 = \|f\chi_{M_n}\|_{L_2(\Omega,E_x)}. \tag{3.5}$$

Se $x \in \mathcal{D}(\int f dE)$ então $f \in L_2(\Omega, E_x)$ e como $f\chi_{M_n}(t) \xrightarrow{n\to\infty} f(t)$ em quase todo ponto e as funções $f\chi_{M_n}$ são limitadas por f, pelo Teorema da Convergência Uniforme, $f\chi_{M_n}$ converge em $L_2(\Omega, E_x)$ e portanto

$$\left\|\left(\int_\Omega f\chi_{M_n} dE - \int_\Omega f\chi_{M_m} dE\right) x\right\|^2 = \|f\chi_{M_n} - f\chi_{M_m}\|_{L_2(\Omega,E_x)} \to 0.$$

Isto é, $(\left(\int_\Omega f\chi_{M_n} dE\right) x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge em H.

Por outro lado, supondo que $(\left(\int_\Omega f\chi_{M_n} dE\right) x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge em H, temos que $\|\left(\int_\Omega f\chi_{M_n} dE\right) x\|$ também convergirá e já que $|f\chi_{M_n}|^2 \to |f|^2$ em quase todo ponto monotonamente, pelo Teorema da Convergência Monótona e (3.5),

$$\int_\Omega |f|^2 dE_x = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f\chi_{M_n}|^2 dE_x < +\infty \implies x \in \mathcal{D}(\textstyle\int f dE).$$

Agora, com a equivalência (3.4) estabelecida, é fácil verificar que $\mathcal{D}(\int f dE)$ é um subespaço vetorial de H, já que, para quaisquer $x, y \in \mathcal{D}(\int f dE)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ se $\left(\int_\Omega f\chi_{M_n} dE\right) x \to w$ e $\left(\int_\Omega f\chi_{M_n} dE\right) y = z$ então

$$\left(\int_\Omega f\chi_{M_n} dE\right)(x + \alpha y) \to w + \alpha z. \tag{3.6}$$

Sabendo que $\mathcal{D}(\int fdE)$ é um subespaço vetorial, nos resta apenas verificar que $\int_\Omega fdE$ está bem definido como um operador, que é uma consequência de (3.4) e que é linear, que segue de 3.6.

III. Sejam $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(M'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sequências limitantes. Pelo Teorema 2.2.3, para qualquer $x \in \mathrm{Dom}(\int_\Omega fdE)$

$$\begin{aligned}\left\|\left((\int_\Omega f\chi_{M_n}dE\right)x - \left(\int_\Omega f\chi_{M'_m}dE\right)x\right\|^2 &= \left\|\left(\int_\Omega f\chi_{M_n} - f\chi_{M'_m}dE\right)x\right\|^2 \\ &= \int_\Omega |f\chi_{M_n} - f\chi_{M'_m}|^2 dE_x. \\ &= \left\|f\chi_{M_n} - f\chi_{M'_m}\right\|_{L_2(\Omega,E_x)} \\ &\leq \|f\chi_{M_n} - f\|_2 + \left\|f - f\chi_{M'_m}\right\|_2.\end{aligned}$$

Agora basta verificarmos que $f\chi_{M_n} - f \to 0$ e $f - f\chi_{M'_m} \to 0$ em $L_2(\Omega, E_x)$ com $n \to \infty$ e $m \to \infty$, respectivamente.

Para isso, notamos que, pela definição do domínio de $\int_\Omega fdE$ em (3.3), $f \in L_2(\Omega, E_x)$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(\int_\Omega fdE)$ e novamente pelo Teorema 2.2.3:

$$\left\|\left(\int_\Omega fdE - \int_\Omega f\chi_{M_n}dE\right)x\right\|^2 = \|f - f\chi_{M_n}\|_2,$$

e

$$\left\|\left(\int_\Omega fdE - \int_\Omega f\chi_{M'_m}dE\right)x\right\|^2 = \|f - f\chi_{M'_m}\|_2.$$

Assim,

$$\left(\int_\Omega f\chi_{M_n}dE\right)x \xrightarrow{\|\cdot\|} \left(\int_\Omega fdE\right)x \implies f\chi_{M_n} \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$$

e, analogamente,

$$\left(\int_\Omega f\chi_{M'_m}dE\right)x \xrightarrow{\|\cdot\|} \left(\int_\Omega fdE\right)x \implies f\chi_{M'_m} \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f.$$

Concluímos então que $\left\|\left(\int_\Omega f\chi_{M_n}dE - \int_\Omega f\chi_{M'_m}dE\right)x\right\| \to 0$ com $n, m \to \infty$ e portanto que $\lim_{n\to\infty}(\int_\Omega f\chi_{M_n}dE)x = (\lim_{m\to\infty} f\chi_{M'_m}dE)$. Como a escolha de x foi arbitrária temos que a integral independe da escolha de sequência limitante.

IV. Como vimos em (3.2), $\bigcup_n^\infty E(M_n)H$ é um subespaço denso de H. Então basta provar que este subespaço é um subconjunto de $\mathrm{Dom}(\int_\Omega f dE)$.

Como $M_k \subseteq M_n$ para naturais $k \leq n$, pelo Teorema 2.2.3,

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega f\chi_{M_n} dE\right) E(M_k)x &= \left(\int_{M_k} f\chi_{M_n} dE\right) x \\ &= \left(\int_{M_n} f\chi_{M_k} dE\right) x \\ &= \left(\int_\Omega f\chi_{M_k} dE\right) x.\end{aligned}$$

Ou seja, $((\int_\Omega f\chi_{M_n} dE)E(M_k)x)_{n\geq k}$ trivialmente converge e, pelo Teorema 3.1.1, $E(M_k)x \in \mathrm{Dom}(\int_\Omega f dE)$.

Dado que as escolhas de $k \in \mathbb{N}$ e x foram arbitrárias, concluímos que $E(M_k)H \subseteq \mathrm{Dom}(\int_\Omega f dE)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e portanto

$$\bigcup_n^\infty E(M_n)H \subseteq \mathrm{Dom}\left(\int_\Omega f dE\right).$$

$\square$

Com a integral espectral definida para o caso $f \in \mathcal{S}$, podemos agora verificar algumas de suas propriedades:

Teorema 3.1.2. *Sejam $f, g \in S(\Omega, \mathcal{A}, E)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.*

I. $\int_\Omega \alpha f + \beta g dE = \overline{\alpha \int_\Omega fg dE + \beta \int_\Omega g dE}$.

II. $\int_\Omega fg dE = \overline{(\int_\Omega f dE)(\int_\Omega g dE)}$.

III. $\mathrm{Dom}((\int_\Omega f dE)(\int_\Omega g dE)) = \mathrm{Dom}(\int_\Omega f dE) \cap \mathrm{Dom}(\int_\Omega g dE)$.

Demonstração. $\square$

Teorema 3.1.3. *Seja $f \in \mathcal{S}(\Omega, \mathcal{A}, E)$. O operador $\int_\Omega f dE$ é invertível se, e somente se, $f \neq 0$ em quase todo ponto segundo E. Neste caso,*

$$\int_\Omega f^{-1} dE = (\int_\Omega f dE)^{-1}$$

onde $f^{-1}(t) = \frac{1}{f(t)}$ respeitando as seguintes convenções $\frac{1}{\infty} = 0$ e $\frac{1}{0} = \infty$.

Demonstração. $\square$

3.1.2 A transformada limitada

Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert e $T : \mathrm{Dom}(T) \subseteq H_1 \to H_2$ um operador linear com domínio $\mathrm{Dom}(T)$ denso em T. Definimos então o conjunto:

$$D(T^*) = \{y \in H_2 : \exists u \in H_1 \text{ tal que } \langle Tx, y\rangle_2 = \langle x, u\rangle_1 \ \forall x \in \mathrm{Dom}(T)\}.$$

Para que $y \in D(T^*)$ precisamos que exista $u \in H_1$ tal que $\langle x, u\rangle_1 = \langle Tx, y\rangle_2$ seja válido para todo $x \in H_1$. Pensando em $\langle Tx, y\rangle_2$ como um funcional em termos de x, temos que se $u \in H_1$ existir este será um funcional limitado. Por outro lado, podemos usar o teorema de Riesz-Fréchet para identificar que se $x \mapsto \langle Tx, y\rangle$ for um funcional linear limitado existe $u \in H_1$ como procuramos. Ou seja,

$$y \in D(T^*) \iff x \mapsto \langle Tx, y\rangle_2 \text{ é contínuo.}$$

Como H_2 é um espaço de Hilbert e o domínio $\mathrm{Dom}(T)$ é denso em H_1, quando $y \in D(T^*)$, $\varphi_y : \mathrm{Dom}(T) \to H_2$ tal que $\varphi_y(x) = \langle Tx, y\rangle_2$ é limitado e portanto admite uma extensão linear limitada $\tilde{\varphi}_y$ única. Ou seja, a escolha de $u \in H_1$ tal que $\langle x, u\rangle$ que em $\mathrm{Dom}(T)$ coincide com φ, é única. Com isso temos a seguinte definição:

Definição 3.1.2. Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert e $T : \mathrm{Dom}(T) \subseteq H_1 \to H_2$ um operador linear densamente definido ($\overline{\mathrm{Dom}(T)} = H_1$). Chamamos de *Hilbert-adjunto de* T, ou simplesmente *adjunto de* T, o operador $T^* : D(T^*) \to H_1$ tal que $T^*(y) = u$ para $u \in H_1$ que satisfaz $\langle x, u\rangle_1 = \langle Tx, y\rangle_2$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(T)$.

Observação. *Observe que essa definição abrange a apresentada em (2.1.1) e assim, em diante entenderemos "adjunto de T" e T^* no contexto de espaços de Hilbert como referindo-se a essa noção. Quando o operador T em questão for limitado, teremos que as definições essencialmente coincidem, devendo se apenas tomar cuidado com o domínio em questão*[2].

De forma análoga a noção de operador adjunto que já tínhamos desenvolvido, o operador T^* pode ser resumido por possibilitar a igualdade:

$$\langle Tx, y\rangle_1 = \langle x, T^*y\rangle_2, \qquad \forall x \in \mathrm{Dom}(T),\ \forall y \in \mathrm{Dom}(T^*).$$

[2]Sendo $T : \mathrm{Dom}(T) \subseteq H \to H$ um operador linear limitado densamente definido, como seu contradomínio é Banach, admite uma única extensão linear limitado $\tilde{T}$ que por sua vez tem um auto-adjunto como em 2.1.1 e é fácil ver que $T^* = \tilde{T}\Big|_{D(T^*)}$

No caso de $H = H_1 = H_2$ dizemos que T é *auto-adjunto* se $T = T^*$ e de forma mais geral chamaremos T de *simétrico* se $T \subseteq T^*$ (isto é, $\mathrm{Dom}(T) \subseteq \mathrm{Dom}(T^*)$ e $Tx = T^*x$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(T)$).

Teorema 3.1.4. *Se $T : \mathrm{Dom}(T) \subseteq H \to H$ é um operador auto-adjunto, então é um operador linear fechado.*

Demonstração. Seja $((x_n, Tx_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{G}(T)$ uma sequência convergindo para (x, y) no gráfico de T. Então $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ e $\lim_{n\to\infty} Tx_n = y$. Daí vemos que, para qualquer $z \in \mathrm{Dom}(T)$:

$$\begin{aligned}\langle x, Tz\rangle &= \langle \lim_{n\to\infty} x_n, Tz\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x_n, Tz\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty}\langle Tx_n, z\rangle = \langle \lim_{n\to\infty} Tx_n, z\rangle = \langle y, z\rangle\end{aligned}$$

Portanto, y é tal que $\langle x, Tz\rangle = \langle y, z\rangle$ para todo $z \in \mathrm{Dom}(T)$ e portanto $y \in \mathrm{Dom}(T^*) = \mathrm{Dom}(T)$. Por definição de T^* temos que $T^*x = y$. Como $T = T^*$, $(x, y) \in \mathcal{G}(T)$. Ou seja, T é um operador linear fechado. $\square$

Com o conceito de operadores auto-adjuntos, que abrange também operadores ilimitados, estabelecido, podemos começar a caminhar em direção à generalização do teorema espectral. Para atingir tal meta, trabalharemos em adaptar um operador auto-adjunto arbitrário para "torna-lo limitado" e com este usaremos o teorema espectral já desenvolvido. Primeiro, veja o seguinte fato:

Teorema 3.1.5. *Sejam H um espaço de Hilbert e $T : \mathrm{Dom}(T) \subseteq H \to H$ um operador densamente definido. Então $\mathcal{G}(T^*) = V(\mathcal{G}(T))^\perp$ para $V : H^2 \to H^2$ dada por $V(x, y) = (-y, x)$.*

Demonstração. Para $x \in \mathrm{Dom}(T)$ e $y \in \mathrm{Dom}(T^*)$ e $\langle (x, y), (z, w)\rangle_{H\times H} = \langle x, z\rangle + \langle y, w\rangle$ o produto interno de $H \times H$:

$$\begin{aligned}\langle V(x, Tx), (y, T^*y)\rangle_{H\times H} &= \langle (-Tx, x), (y, T^*y)\rangle_{H\times H} \\ &= -\langle Tx, y\rangle + \langle x, T^*y\rangle = 0.\end{aligned}$$

Ou seja, $\mathcal{G}(T^*) \subseteq V(\mathcal{G}(T))^\perp$. Agora, seja $(y, w) \in V(\mathcal{G}(T))^\perp$. Então

$$\langle V(x, Tx), (y, u)\rangle = \langle -Tx, y\rangle + \langle x, u\rangle = 0, \qquad \forall x \in \mathrm{Dom}(T).$$

Assim, $\langle Tx, y\rangle = \langle x, u\rangle$ e com isso, $y \in \mathrm{Dom}(T^*)$ e $T^*y = u$. Daí temos que $(y, u) \in \mathcal{G}(T^*)$ e $V(\mathcal{G}(T))^\perp \subseteq G(T^*)$. Ou seja, $\mathcal{G}(T^*) = V(\mathcal{G}(T))^\perp$. $\square$

Teorema 3.1.6. *Seja H um espaço de Hilbert e $T : \mathrm{Dom}(T) \subseteq H \to H$ um operador densamente definido e auto-adjunto. Então $I + T^2 : \mathrm{Dom}(T) \to H$ é um operador invertível com inversa $(I + T^2)^{-1} : H \to \mathrm{Dom}(T)$ limitada e auto-adjunta.*

Demonstração. Como $\mathcal{G}(T^*)$ e $V(\mathcal{G}(T))$, para $V(x, y) = (-y, x)$, são subespaços de $H^2 = H \times H$ ortogonais (teorema 3.1.5), pelo teorema da projeção ortogonal:

$$H^2 = \mathcal{G}(T) \oplus V(\mathcal{G}(T))$$

Então, para todo $u \in H$ existem $x, y \in \mathrm{Dom}(T)$ únicos tais que:

$$(0, u) = (y, Ty) + V(x, Tx) = (y, Ty) + (-Tx, x) = (y - Tx, x + Ty).$$

Ou seja, para todo $u \in H$ existe um único $x \in \mathrm{Dom}(T)$ tal que $Tx = y$ e $x + Ty = x + T^2x = (I + T^2)x = u$. Ou seja, $(I + T^2) : \mathrm{Dom}(T) \to H$ é uma bijeção.

Para ver que $(I + T^2)^{-1}$ é limitado, basta tomar $y \in H$ qualquer, e por $(I + T^2) : \mathrm{Dom}(T) \to H$ ser sobrejetora, sabemos que existe $x \in \mathrm{Dom}(T)$ tal que $(I + T^2)x = y$, então

$$\begin{aligned}
\|y\|^2 &= \|(I + T^2)x\|^2 = \langle x + T^2x, x + T^2x\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle x, T^2x\rangle + \langle T^2x, x\rangle + \langle T^2x, T^2x\rangle \\
&= \|x\|^2 + 2\|Tx\|^2 + \|T^2x\|^2 \\
&\geq \|x\|^2 = \|(I + T^2)^{-1}y\|^2.
\end{aligned}$$

Por fim, veja que para qualquer $y = (I + T^2)x \in H$ e, como $(I + T^2)$ é a soma de dois operadores auto-adjuntos, é auto-adjunto,

$$\langle (I + T^2)^{-1}y, y\rangle = \langle x, (I + T^2)x\rangle = \langle (I + T^2)x, x\rangle = \langle y, (I + T^2)^{-1}y\rangle.$$

Então $(I + T^2)^{-1}$ é um operador limitado e auto-adjunto. □

Teorema 3.1.7. *Todo operador linear limitado positivo T admite uma raiz quadrada $T^{1/2}$. Isto é, um operador $T^{1/2}$ tal que $T = T^{1/2}T^{1/2}$.*

Demonstração. Veja o apêndice. □

Com isso podemos construir o operador que nos permitirá usar do Teorema Espectral 2.2.5:

$$\boxed{Z_T = T((I + T^2)^{-1})^{1/2}.}$$

Onde $Z_T : H \to H$. A sua construção se dá nessa forma para nos garante algumas propriedades importantes:

Teorema 3.1.8. *Seja* $T : \mathrm{Dom}(T) \subseteq H \to H$ *um operador auto-adjunto então:*

1. Z_T *é um operador linear limitado com* $\|Z_T\| \leq 1$.
2. Z_T *é um operador auto-adjunto.*
3. $I - Z_T^2 = (1 + T^2)^{-1}$

Demonstração. Para esta demonstração adotaremos a notação $C_T = (I + T^2)^{-1}$.

1. Que Z_T é limitado segue pelo fato de que T é fechado (Teorema 3.1.4) e que $C_T^{1/2}$ é limitado (segue da definição do operador raiz quadrada): Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência qualquer em H tal que $x_n \to x$ e $Z_T(x_n) \to y$. Uma vez que $C_T^{1/2}$ é limitado, $C_T^{1/2}x_n \to C_T^{1/2}x$ e como T é um operador fechado, $C_T^{1/2}x_n \to C_T^{1/2}x$ e $TC_T^{1/2}x_n \to y$ implicam que $y = T(C_T^{1/2}x)$. Ou seja, $(x, Z_T(x)) \in \mathcal{G}(Z_T)$ e portanto $Z_T : H \to H$ é um operador linear fechado. Pelo teorema do gráfico fechado, Z_T é limitado.

   Agora, tome $y \in C_T^{1/2}(H)$ qualquer. Então $y = C_T^{1/2}x$ e

$$\begin{aligned}
\|Z_T y\|^2 &= \|TC_T^{1/2}C_T^{1/2}x\|^2 = \|TC_T x\|^2 \\
&= \langle TC_T x, TC_T x\rangle \leq \langle TTC_T x, C_T x\rangle + \underbrace{\langle x, C_T x\rangle}_{\geq 0} \\
&= \langle (I + T^2)C_T x, C_T x\rangle = \langle x, C_T x\rangle = \langle C_T^{1/2}x, C_T^{1/2}x\rangle \\
&= \|C_T^{1/2}x\|^2 = \|y\|^2.
\end{aligned}$$

   Assim temos que $\|Z_T y\| \leq \|y\|$ para $y \in C_T^{1/2}(H)$. Para ver que é suficiente analisar estes pontos verificaremos primeiro que $C_T^{1/2}(H)$ é denso em H: Como $C_T : H \to \mathrm{Dom}(T)$ é sobrejetora, $C_T(H) = \mathrm{Dom}(T)$ que é denso em H. Uma vez que $C_T^{1/2}(H) \subseteq H$ e

$$\mathrm{Dom}(T) \subseteq C_T(H) = C_T^{1/2}(C_T^{1/2}(H)) \subseteq C_T^{1/2}(H),$$

   Temos que $C_T^{1/2}(H)$ é denso em H.

Por fim, para qualquer $x \in H$, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_T^{1/2}(H)$ tal que $x_n \to x$. Pela continuidade de Z_T e da norma verificamos que

$$\|Z_T x\| = \lim_{n\to\infty} \|Z_T x_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|.$$

2.

3.

$$I - Z_T^2 = I - (TC_T^{1/2})(TC_T^{1/2})$$

□

3.1.3 O Teorema Espectral para operadores auto-adjuntos

Teorema 3.1.9 (Teorema Espectral)**.** *Seja $T : \mathrm{Dom}(T) \subseteq H \to H$ um operador linear auto-adjunto em um espaço de Hilbert H. Então existe uma única medida espectral E definida em $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que*

$$T = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE(\lambda).$$

Demonstração. Como previsto pela seção anterior, nós usaremos o operador T para definir $Z_T : H \to H$

$$Z_T = (T(I + T^2)^{-1})^{1/2}$$

que, pelo Teorema 3.1.8, é um operador linear limitado e auto-adjunto com norma $\|Z_T\|$. Pelo Lema 1.2.3 e Teorema 2.1.6 podemos concluir que $\sigma(Z_T) \subseteq [-1, 1]$. Pelo Teorema Espectral 2.2.5 temos a existência de uma medida espectral F sobre $\mathcal{B}([-1, 1])$ (única) e a seguinte representação:

$$Z_T = \int_{[-1,1]} \lambda dF(\lambda).$$

Segue que $F(\{-1\}) = \int_{\{-1\}} 1dF(\lambda)$ por 2.2.3. Do mesmo teorema temos que

$$I + Z_T = \int_{[-1,1]} 1dF(\lambda) + \int_{[-1,1]} \lambda dF(\lambda) = \int_{-1}^{1} 1 + \lambda dF(\lambda),$$

e com isso,

$$(I + Z_T)F(\{-1\}) = \int_{\{-1\}} 1 + \lambda dF(\lambda) = 0$$

portanto $F(\{-1\})(H) \subseteq \ker(I + Z_T)$. Analogamente,

$$I - Z_T = \int_{-1}^{1} 1 - \lambda dF(\lambda),$$

e,

$$(I - Z_T)F(\{1\}) = \int_{\{1\}} 1 - \lambda dF(\lambda) = 0 \implies F(\{1\})(H) \subseteq \ker(I - Z_T).$$

Combinando isso temos que

$$F(\{1\})H + F(\{-1\})H \subseteq \ker((I + Z_T)(I - Z_T)) = \ker(I - Z_T^2)$$

Pelo Teorema 3.1.8, $\ker(I - Z_T^2) = \ker((I + T^2)^{-1}) = \{0\}$ (já que é uma bijeção). Assim, $F(\{-1\}) = F(\{1\}) = 0$. É esse fato que nos possibilitará usar a função $f(t) = t(1 - t^2)^{-1/2}$, a inversa da função $t(1 + t^2)^{-1/2}$ que inspirou nossa abordagem à esse problema:

Isso nos garante que f será finita em quase todo ponto segundo F, já que onde F é não nula (um subconjunto de $(-1, 1)$), f atinge valores finitos[3].

Além disso, sabendo que $f \in \mathcal{S}([-1, 1], \mathcal{B}([-1, 1]), F)$, mostraremos que $T = \int_{[-1,1]} f dF$: Pelo Teorema 3.1.2 e dado que $t, (1 - t^2)^{-1/2} \in \mathcal{S}$, sabemos que $\int_{\mathbb{R}}$ terá como domínio

$$\text{Dom}\left(\int_{[-1,1]} f dF\right) = \text{Dom}\left(\int_{[-1,1]} \lambda dF\right) \cap \text{Dom}\left(\int_{[-1,1]} (1 - \lambda^2)^{1/2} dF\right).$$

Uma vez que $|\lambda| \leq 1$ e por (3.3),

$$\begin{aligned}
\text{Dom}\left(\int_{[-1,1]} \lambda dF\right) &= \left\{x \in H : \int_{[-1,1]} \lambda dF_x < +\infty\right\} \\
&\supseteq \left\{x \in H : \int_{[-1,1]} 1 dF_x < +\infty\right\} \\
&= \{x \in H : F_x([-1, 1]) < +\infty\} \\
&= \{x \in H : \langle F([-1, 1])x, x\rangle < +\infty\} \\
&= \left\{x \in H : \|x\|^2 < +\infty\right\} = H,
\end{aligned}$$

[3]É uma convenção usual em teoria da medida estabelecermos $0 \cdot \infty = 0$. Permitindo assim a integração de funções como f levando $[-1, 1]$ a $\overline{\mathbb{R}}$ (os reais estendidos).

temos que

$$\mathrm{Dom}\left(\int_{[-1,1]} f dF\right) = \mathrm{Dom}\left(\int_{[-1,1]} (1-\lambda^2)^{1/2} dF\right).$$

Com o domínio $\square$

Índice

Bibliografia

[1] Lars Ahlfors. *Complex Analysis*. Mc-Graw Hill, 1979.

[2] Sheldon Axler. *Linear Algebra Done Right*. Springer, 2024.

[3] N. Dunford and J. T. Schwartz. *Linear Operators, Part 1: General Theory*. John Wiley & Sons, 1958.

[4] I. Gohberg, S. Goldberg, and M. A. Kaashoek. *Classes of Linear Operators Vol. I*. Birkhäuser Basel, 2001.

[5] E. Kreyszig. *Functional Analysis*. John Wiley & Sons, 1978.

[6] F. Riesz and B. Sz.-Nagy. *Functional Analysis*. Dover Publications, 1955.

[7] K. Schmudgen. *Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Space*. Springer Dordrecht, 2012.