Bases de Riesz e séries de Fourier não harmônicas

Lucas Nunes Fernandes Teles
Orientador: Alexandre Kawano

Bolsa FAPESP, 2022-2023
Departamento de Eng. Mecatrônica e Sistemas Mecânicos, Escola Politécnica, USP

Introdução

Em disciplinas de Álgebra linear, alunos se familiarizam com o conceito de bases em espaços vetoriais, em particular com a base de Hamel.

Definição 1 (Base de Hamel)**.** Se V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) e $B \subset V$ um subconjunto de vetores linearmente independentes, dizemos que B é uma base de Hamel de V se, para qualquer $u \in V$, existem $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ (respectivamente $\mathbb{C}$) e $v_1, ..., v_n \in B$ tais que:

$$u = a_1 v_1 + ... + a_n v_n.$$

Com essa noção podemos gerar, de forma única, qualquer ponto em um espaço vetorial. E, com isso, são introduzidos conceitos como sistemas de coordenada e a noção de dimensão de espaços vetoriais. Em particular, dizemos que a dimensão de um espaço vetorial é a cardinalidade de uma base de Hamel deste espaço.

Porém, o estudo de bases em espaços vetoriais não se restringe a bases de Hamel, outras noções de base, como a base de Schauder, oferecem além da representação única de vetores, vantagens particulares a espaços vetoriais de dimensão infinita.

Definição 2 (Base de Schauder)**.** Se $(B, \|\cdot\|)$ é um espaço normado completo de dimensão infinita e $(b_1, b_2, ...) \subset B$ uma sequência, dizemos que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma base de Schauder de B se para qualquer $y \in B$ existe uma sequência de escalares $(a_1, a_2, ...)$ única tal que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i = y. \tag{1}$$

I.e. $\|y - \sum_{i=1}^{n} a_i b_i\| \to 0$ com $n \to \infty$.

Com a base de Schauder podemos não só gerar, de forma única, os elementos de um espaço vetorial, como podemos aproximá-los com as somas parciais de (1). Com estruturas como a norma e em seguida o produto interno, no contexto de espaços de Banach e espaços de Hilbert respectivamente, podemos definir as séries de Fourier:

Definição 3. Se $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é um espaço de Hilbert separável, $(e_1, e_2, ...)$ uma base de Schauder ortonormal de H e $f \in H$ um vetor qualquer, chamamos a seguinte série de **expansão de Fourier de** f ou, simplesmente **série de Fourier**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n\rangle e_n.$$

Objetivos

Neste projeto de pesquisa temos por objetivo demonstrar um teorema de Pailey & Wiener referente a bases em espaços de Banach e suas aplicações em séries de Fourier não harmônicas. E, no processo introduzir os espaços de Banach, espaços de Hilbert e motivar a representação de funções com séries de Fourier não harmônicas. Os resultados têm aplicações na análise de problemas inversos.

Métodos e procedimentos

Introduzimos os conceitos de espaços de Banach, de Hilbert, bases de Schauder e resultados elementares associados a estes. Com essas noções motivamos a definição das séries de Fourier e provamos propriedades e teoremas pertinentes, como o teorema de Riesz-Fischer. Por fim, apresentamos o teorema da aplicação aberta e o teorema da limitação uniforme, a partir dos quais provamos resultados relacionados aos funcionais de coeficiente, em antecipação ao teorema de Paley-Wiener.

Resultados e Conclusões

Dentre os resultados obtidos, selecionamos como representativos deste estudo:

- A validade da expansão de Fourier como representação única de vetores f de um espaço de Hilbert H com base de Schauder $(e_1, e_2, ...)$ ortonormal, isto é,
$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n\rangle e_n.$$
- O teorema de Riesz-Fischer que declara a existência de um isomorfismo entre espaços de Hilbert separáveis e o espaço ℓ^2. Nos permitindo assim, representar qualquer elemento de H como uma sequência em ℓ^2 e estabelecendo uma noção de equivalência entre espaços de Hilbert separáveis.
- A limitação dos operadores de soma parcial associados aos coeficientes de Fourier, como descritos a seguir:
$$1 < \sup_{n\in\mathbb{N}} \|S_n(x)\| < +\infty.$$
Onde $S_n(x)$ é o operador linear que associa à cada $x \in H$ a soma parcial $\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_n\rangle e_n$ da sua série de Fourier.

Referências bibliográficas

Bartle, R. G. (1976), *Introduction to Real Analysis, 2nd edition*, John Wiley & Sons, Incorporated.
Kreyszig, E. (1978), *Functional Analysis*, John Wiley & Sons.
Young, R. M. (2001), *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series, Revised first edition*, Academic Press.

Agradecimentos:

IME-USP

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA

FAPESP

Contato: Email: lucasteles@usp.br, tel: (85) 98170-1415.